



MATEMATIKA

SEKOLAH DASAR

Sebuah Pendekatan Realistik Reflektif

MATEMATIKA SEKOLAH DASAR

Sebuah Pendekatan Realistik Reflektif

Prof. Dr. Marsigit, M.A.

Budiharti, M.Pd.

Anwar Novianto, M.Pd.

Hendra Erik Rudyanto, M.Pd.

 **aria Emanuela Ewa, M.Pd.**

MATEMATIKA SEKOLAH DASAR; Sebuah Pendekatan Realistik Reflektif

oleh Prof. Dr. Marsigit, M.A., Budiharti, M.Pd.; Anwar Novianto, M.Pd.; Hendra Erik Rudyanto, M.Pd.; Maria Emanuela, M.Pd.

Hak Cipta © 2017 pada penulis



Ruko Jambusari 7A Yogyakarta 55283
Telp: 0274-889398; 882262 Fax: 0274-889057

Hak Cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ini dalam bentuk apa pun, secara elektronik maupun mekanis, termasuk memfotokopi, merekam, atau dengan teknik perekaman lainnya, tanpa izin tertulis dari penerbit.

Tajuk Entri Utama: Marsigit

MATEMATIKA SEKOLAH DASAR; Sebuah Pendekatan Realistik Reflektif/Marsigit; Budiharti; Anwar Novianto; Hendra Erik Rudyanto; Maria Emanuela

- Edisi Pertama. Cet. Ke-1. - Yogyakarta: Matematika, 2017
xiv + 148 hlm.; 25 cm

Bibliografi.: 135 - 137; Sumber Gambar.: 139 - 143

ISBN :
E-ISBN :

1.

I. Budiharti	II. Novianto, Anwar
III. Rudyanto, Hendra Erik	IV. Maria Emanuela
V. Judul	

.....

Semua informasi tentang buku ini, silahkan scan QR Code di cover belakang buku ini

KATA PENGANTAR

Buku ini menyajikan suatu upaya untuk mengenalkan matematika sekolah dasar dengan pendekatan baru, yang penulis sebut sebagai pendekatan realistik reflektif. Dengan pendekatan realistik reflektif penulis berusaha untuk mengkaji berbagai macam pendekatan dan metode matematika SD dalam perspektif pembelajaran matematika inovatif. Pendekatan realistik reflektif merentang dari matematika realistik menuju matematika reflektif dengan tahapan secara berhirarki: matematika konkrit, matematika semi konkrit, matematika ikonik, matematika semi formal, matematika formal dan matematika reflektif. Pendekatan realistik reflektif ini sebagai gabungan dan pengembangan pendekatan matematika realistik dengan aspek pembelajarannya yaitu kegiatan refleksi matematika oleh siswa.

Penulis mengharapkan buku ini dapat dibaca dan digunakan oleh guru matematika Sekolah Dasar, guru matematika, praktisi pendidikan, mahasiswa S1 PGSD, mahasiswa S2 PGSD konsentrasi Matematika, mahasiswa S3 Ilmu Pendidikan konsentrasi Pendidikan Dasar, S3 Pendidikan Dasar konsentrasi Matematika, mahasiswa S1 Pendidikan Matematika, Dosen Pendidikan Matematika, Pengembang kurikulum pendidikan matematika dan *stake holder* pendidikan matematika.

Penulis mengucapkan terimakasih yang sebesar-besarnya kepada berbagai pihak yang telah memungkinkan diterbitkannya buku ini.

Mudah-mudahan buku ini dapat bermanfaat untuk ikut berperan serta mempromosikan pendidikan matematika yang inovatif di Indonesia. Penulis dengan senang hati apabila ada saran dan kritik untuk meningkatkan kualitas buku ini.

Yogyakarta, Juni 2017

DAFTAR ISI

KATA PENGANTAR	v
DAFTAR ISI	vii
PENDAHULUAN	ix
BAB 1 BERBAGAI PENDEKATAN UNTUK MEMAHAMI MATEMATIKA SD	1
1.1 Psikologi dan Teori Belajar Matematika SD	1
1.2  Learning Trajectory Matematika SD	12
1.3 Pendekatan Matematika Realistik Reflektif	14
BAB 2 MATEMATIKA KONKRET	19
2.1 Pengertian Matematika Konkret	19
2.2 Kedudukan Matematika Konkret	20
2.3 Pembelajaran	21
2.2 Geometri dan Pengukuran	26
BAB 3 MATEMATIKA SEMI KONKRET	37
3.1 Pengertian Matematika Semi Konkret	37
3.2 Kedudukan Matematika Semi Konkret	38
3.3 Pembelajaran	38
3.2 Geometri dan Pengukuran	44
BAB 4 MATEMATIKA IKONIK	55

4.1	Pengertian	55
4.2	Kedudukan	55
4.3	Pembelajaran	56
BAB 5	MATEMATIKA SEMIFORMAL	73
5.1	Pengertian	73
5.2	Kedudukan	74
5.3	Pembelajaran	75
BAB 6	MATEMATIKA FORMAL	85
6.1	Pengertian	85
6.2	Kedudukan	87
6.3	Pembelajaran	87
BAB 7	MATEMATIKA REFLEKTIF	127
7.1	Pengertian	127
7.2	Kedudukan	130
7.3	Pembelajaran	132
DAFTAR PUSTAKA		135
SUMBER GAMBAR		139
TENTANG PENULIS		145

PENDAHULUAN

Perkembangan pendidikan matematika secara global, ditandai dengan adanya pergeseran titik pusat pendidikan (pembelajaran) dari pendidik ke peserta didik. Menurut Marsigit (2015), hasil penelitian menunjukkan bahwa menempatkan sibelajar sebagai titik pusat (sentral) dalam pendidikan akan memberikan implikasi yang luas dan berbeda dibanding dengan menempatkan pendidik sebagai titik sentral. *'Transfer of knowledge'* dari guru ke murid telah dianggap sebagai paradigma yang kurang sesuai dengan hakekat mendidik. Sebagai alternatifnya maka mulai dikembangkan paradigma baru yaitu *'developing'* sebagai upaya untuk mengembangkan potensi sibelajar. Dengan demikian peran guru juga mengalami pergeseran dari guru yang berfungsi sebagai pemberi ilmu menjadi berfungsi sebagai fasilitator dalam proses belajar mengajar.

Menurut Freudenthal (Gravemeijer & Terwel, 2000) bahwa matematika sebagai aktivitas manusia merupakan kegiatan pemecahan masalah, dari mencari masalah, tetapi juga merupakan kegiatan organisasi materi pelajaran. Ini bisa menjadi masalah dari kenyataan yang harus diatur sesuai dengan pola-pola matematis jika masalah dari realitas harus dipecahkan. Hal ini juga dapat menjadi masalah matematika, hasil baru atau lama, Anda sendiri atau orang lain, yang harus diatur sesuai dengan

ide-ide baru, untuk menjadi lebih baik dipahami, dalam konteks yang lebih luas atau dengan pendekatan aksiomatik.

Selanjutnya Reys et al, (2009) berpendapat bahwa 1) matematika adalah studi tentang pola dan hubungan, 2) matematika adalah cara berpikir, 3) matematika adalah seni, ditandai dengan konsistensi ketertiban dan internal, 4) matematika adalah bahasa, dengan hati-hati menggunakan istilah yang didefinisikan dan simbol, 5) matematika adalah alat.

Menurut Courant & Robbins (1996) matematika adalah sebagai ekspresi dari pikiran manusia yang mencerminkan kehendak aktif, alasan kontemplatif dan keinginan untuk kesempurnaan estetika. Elemen dasarnya adalah logika dan intuisi, analisis dan konstruksi, generalitas dan individualitas. Meskipun tradisi yang berbeda mungkin menekankan aspek yang berbeda, hanya interaksi antitetis yang kuat dan usaha sintesis yang tidak menyerah yang merupakan kehidupan, kegunaan, dan nilai tertinggi dari ilmu matematika.

Menurut Russel (2010), matematika adalah ilmu yang mempelajari tentang sesuatu yang dimulai dari bagian yang paling mudah ke bagian yang sulit, dari bagian yang konkrit ke bagian yang abstrak sehingga dapat dicapai dari dua arah yang saling berlawanan.

Dari beberapa pendapat ahli di atas matematika adalah ekspresi dari pikiran manusia dan sebagai aktivitas manusia untuk memecahkan masalah. Matematika juga sebagai studi tentang pola dan hubungan serta merupakan bahasa dengan menggunakan istilah yang didefinisikan dan simbol. Matematika mempelajari sesuatu dari bagian yang mudah ke bagian yang sulit, dari bagian yang konkrit ke bagian yang abstrak, sehingga dapat dicapai dari dua arah yang berlawanan.

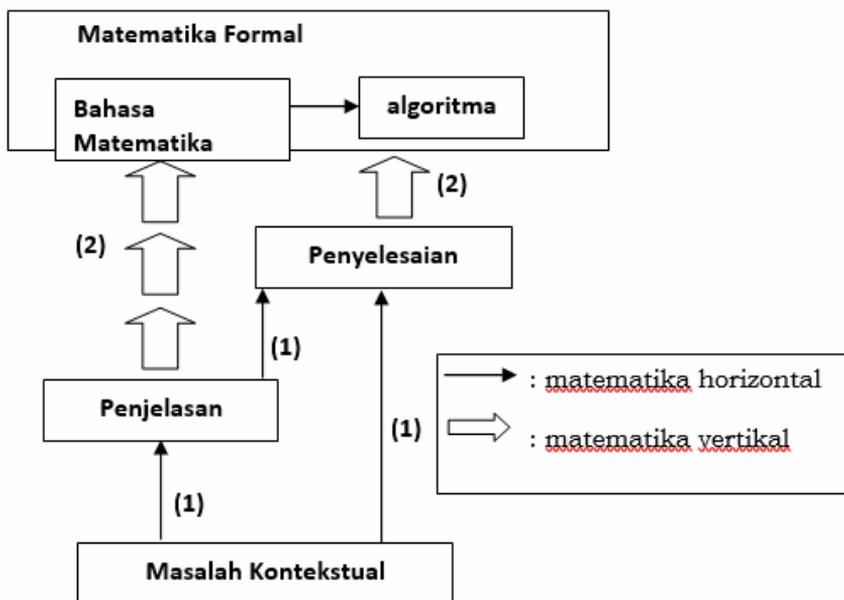
Selanjutnya menurut Ebbut dan Streckker (Marsigit, 2015) menguraikan bahwa Matematika Sekolah secara pedagogik perlu dibedakan dengan Matematika Aksiomatik. Jika Matematika Aksiomatik bersifat formal dan lazim dipelajari untuk para matematikawan di Perguruan Tinggi, maka Matematika Sekolah lebih cocok digunakan untuk siswa-siswa dari SD samapai dengan SMP. Ebbut dan Starkker mendefinisikan Matematika

Sekolah yaitu (1) Matematika sebagai kegiatan penelusuran pola dan hubungan, (2) Matematika sebagai kreativitas yang memerlukan imajinasi, (3) Matematika sebagai kegiatan pemecahan masalah dan (4) Matematika sebagai alat berkomunikasi.

Salah satu pendekatan matematika yang sesuai dengan Matematika Sekolah adalah matematika realistik. Pembelajaran matematika realistik adalah pembelajaran matematika yang berorientasi pada matematisasi pengalaman sehari-hari (*mathematize of everyday experience*) dan menerapkan matematika dalam kehidupan sehari-hari. Pendekatan realistik ini didasarkan pada pandangan Freudenthal, bahwa matematika merupakan aktivitas manusia. Manusia (dalam hal ini siswa) harus aktif untuk menemukan konsep-konsep matematika itu dengan melakukan matematisasi. Matematisasi adalah proses pematematikaan. Pembelajaran matematika semestinya memungkinkan siswa untuk menemukan kembali (*reinvent*) konsep-konsep yang telah ditemukan para matematikawan dengan aktif melakukan matematisasi.

Pada awalnya untuk memecahkan masalah kontekstual siswa akan menyelesaikan secara informal dengan bahasa mereka sendiri. Proses ini disebut matematisasi horisontal. Menurut Sutarto Hadi (2005), dalam menyelesaikan masalah kontekstual pada pembelajaran matematika dengan model pembelajaran matematika realistik siswa diberi kesempatan menggunakan cara-cara mereka sendiri. Dengan demikian kepada siswa dibiasakan untuk bebas berpikir dan berani berpendapat. Setelah mereka cukup familiar terhadap proses-proses pemecahan yang serupa, mereka akan mulai menggunakan bahasa yang lebih formal dan akhirnya mereka akan menemukan suatu algoritma. Proses ini disebut matematisasi vertikal (Gravemeijer, 1994).

Gravemeijer (1994) menggambarkan proses matematisasi tersebut sebagai berikut.



Gambar 0.1. *Proses Matematisasi*

Menurut Treffers (Streefland, 1991), proses matematisasi diklasifikasikan dalam empat pendekatan pembelajaran dalam pendidikan matematika yaitu: mekanistik, empiristik, strukturalistik, dan realistik. Perbedaan keempat pendekatan ini terletak pada sejauh mana pendekatan tersebut memberikan penekanan pada kedua komponen. Treffers menggambar-kannya dalam tabel berikut ini.

Tabel 0.1. *Matematisasi dalam Pendidikan Matematika*

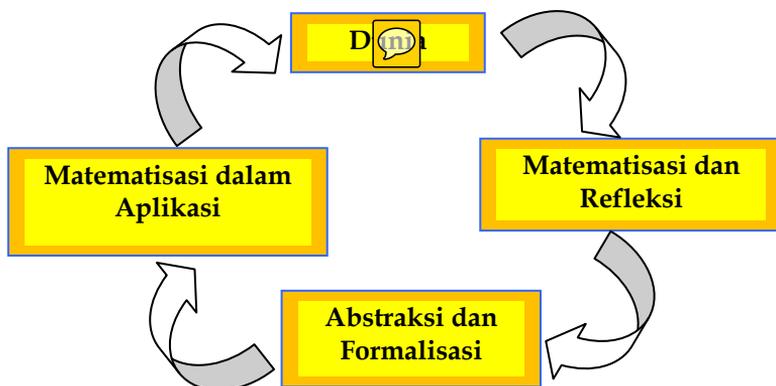
	Horisontal	Vertikal
Mekanistik	-	+
Empiristik	+	-
Strukturalistik	-	+
Realistik	+	+

Menurut Treffers (Streefland, 1991) kedua komponen matematisasi tidak terdapat dalam pendekatan mekanistik. Pendekatan mekanistik bersifat algoritmik dan cenderung menjadikan proses pembelajaran menggunakan

metode ceramah dan latihan menggunakan rumus-rumus dan hukum-hukum matematika. Dalam pendekatan empiristik, matematisasi horizontal dimanifestasikan secara jelas dengan menggunakan cara informal sebagai basis pembelajaran, namun tanpa dukungan model-model, skema dan sejenisnya, pembelajaran sukar mencapai tingkat formal. Dalam pendekatan strukturalistik, operasi-operasi bentuk-bentuk matematis, dan sejenisnya dikonkretkan dengan alat bantu atau media pembelajaran yang sengaja dibuat sebagai representasi konsep dan ide-ide matematik. Matematisasi vertikal berlangsung dengan media terstruktur tersebut. Namun, aplikasi matematika tidak mungkin tercapai, kecuali siswa sudah memahami bagaimana prosedur yang dipelajarinya. Akibatnya, anak-anak tidak dapat mengembangkan lebih lanjut cara ilmiah dan formal mereka sendiri.

Menurut de Lange (1987) aktivitas yang memuat matematisasi horisontal adalah: mengidentifikasi, membuat skema, merumuskan dan memvisualisasikan masalah dengan cara-cara berbeda, menemukan hubungan, menemukan aturan, mengenali aspek yang mirip dalam problem yang berbeda, mentransfer masalah dunia nyata ke masalah matematika, dan mentransfer masalah dunia nyata ke model matematika yang diketahui. Sedangkan aktivitas yang memuat matematisasi vertikal adalah: menunjukkan hubungan dalam suatu rumus, membuktikan, memperbaiki model, menggunakan model yang berbeda, memadukan beberapa model, merumuskan konsep matematika yang baru, dan menggeneralisasikan.

Menurut de Lange (1987) proses pengembangan konsep-konsep dan ide-ide matematika berawal dari dunia nyata, mematematisasi, kemudian membawa kembali ke dunia nyata. Hal ini diperlihatkan dalam gambar 2 berikut.



Gambar 0.2 . *Matematisasi Konseptual (de Lange, 1987: 72)*

Pendekatan matematika realistik menekankan konsepsi yang sudah dikenal siswa pada awal proses belajar. Setiap siswa mempunyai konsep awal tentang ide-ide matematika. Setelah mereka mengalami proses belajar yang bermakna dimana mereka mengkonstruksi sendiri pengetahuannya, maka konsep yang mereka miliki akan berkembang. Guru sebagai fasilitator harus memberikan kesempatan kepada siswa untuk berproses secara aktif.

Dalam buku ini akan dibahas mengenai pendekatan matematika realistik reflektif. Pendekatan ini adalah pengembangan dari pendekatan matematika realistik. Penjelasan tentang apa itu pendekatan matematika realistik reflektif akan dibahas pada bab selanjutnya. Dalam buku ini mencakup tentang pembahasan yang mencakup materi yang ada di Sekolah Dasar meliputi tentang bilangan, geometri dan pengukuran.

1

BERBAGAI PENDEKATAN UNTUK MEMAHAMI MATEMATIKA SD

1.1 Psikologi dan Teori Belajar Matematika SD

1.1.1 Teori Piaget

Teorinya perkembangan intelektual Jean Piaget menekankan bahwa anak-anak membangun secara aktif dunia kognitif mereka sendiri, informasi tidak hanya sekedar dituangkan ke dalam pikiran mereka sendiri, informasi tidak sekedar ke dalam pikiran mereka dari lingkungan (Santrock, 2002). Jean Piaget (Lefrancois, 2000) menyebutkan bahwa struktur kognitif sebagai Skemata (Schemas), yaitu kumpulan dari skema-skema. Seorang individu dapat mengikat, memahami, dan memberikan respon terhadap stimulus disebabkan karena bekerjanya skemata ini. Skemata ini berkembang secara kronologis, sebagai hasil interaksi individu dengan lingkungannya, sehingga individu yang lebih dewasa memiliki struktur kognitif yang lebih lengkap dari pada ketika ia masih kecil.

Jean Piaget adalah orang pertama yang menggunakan filsafat konstruktivis dalam proses belajar mengajar. Jean Piaget (Bell, 1981) berpendapat bahwa proses berpikir manusia merupakan suatu perkembangan yang bertahap dari berpikir intelektual kongkret ke abstrak berurutan melalui empat tahap perkembangan, sebagai berikut.

Periode Sensori Motor (0 – 2) tahun. Bagi anak yang berada pada tahap ini, pengalaman diperoleh melalui perbuatan fisik (gerakan anggota tubuh) dan sensori (koordinasi alat indra). Karakteristik periode ini merupakan gerakan-gerakan sebagai akibat reaksi langsung dari rangsangan. Rangsangan tersebut timbul karena anak melihat dan meraba objek. Pada tahap ini, anak belum mempunyai kesadaran adanya konsep objek yang tetap. Bila objek itu disembunyikan, maka anak tidak akan mencarinya lagi. Namun karena pengalamannya terhadap lingkungannya, pada akhir periode ini, anak menyadari bahwa objek yang disembunyikan tadi masih ada dan ia akan mencarinya.

Periode Pra-operasional (2 – 7) tahun. Periode ini merupakan tahap persiapan untuk pengorganisasian operasi konkrit. Operasi yang dimaksud di sini adalah suatu proses berpikir atau logik, dan merupakan aktivitas mental, bukan aktivitas sensori motor. Operasi konkrit adalah berupa tindakan-tindakan kognitif seperti mengklasifikasikan sekelompok objek, menata letak benda berdasarkan urutan tertentu, dan membilang. Pada periode ini anak di dalam berpikirnya tidak didasarkan kepada keputusan yang logis melainkan didasarkan kepada keputusan yang dapat dilihat seketika. Periode ini sering disebut juga periode pemberian simbol, misalnya suatu benda diberi nama (simbol). Pada periode ini anak terpaku kepada kontak langsung dengan lingkungannya, kemudian anak itu mulai memanipulasi simbol dari benda-benda sekitarnya. Walaupun pada periode permulaan pra-operasional ini anak mampu menggunakan simbol-simbol, ia masih sulit melihat hubungan-hubungan dan mengambil kesimpulan secara taat asas.

Periode operasi kongkret (7 – 12) tahun. Umumnya anak-anak pada tahap ini telah memahami konsep kekekalan, kemampuan mengklasifikasi, mampu memandangi suatu objek dari sudut pandang yang berbeda secara objektif, dan mampu berfikir reversibel. Dalam periode ini anak berpikirnya sudah dikatakan menjadi operasional. Periode ini disebut operasi kongkret sebab berpikir logiknya didasarkan atas manipulasi fisik dari objek-objek. Operasi kongkret hanyalah menunjukkan kenyataan adanya hubungan dengan pengalaman empirik-kongkret yang lampau dan

masih mendapat kesulitan dalam mengambil kesimpulan yang logis dari pengalaman-pengalaman yang khusus. Pengerjaan-pengerjaan logika dapat dilakukan dengan berorientasi ke objek-objek atau peristiwa-peristiwa yang langsung dialami anak. Anak itu belum memperhitungkan semua kemungkinan dan kemudian mencoba menemukan kemungkinan yang mana yang akan terjadi. Anak masih terikat kepada pengalaman pribadi. Pengalaman anak masih kongkret dan belum formal.

Periode Operasi Formal (> 12) tahun. Periode ini merupakan tahap terakhir dari keempat periode perkembangan intelektual. Periode operasi formal ini disebut juga disebut periode operasi hipotetik-deduktif yang merupakan tahap tertinggi dari perkembangan intelektual. Anak-anak pada periode ini sudah memberikan alasan dengan menggunakan lebih banyak simbol atau gagasan dalam cara berpikir. Anak sudah dapat mengoperasikan argumen-argumen tanpa dikaitkan dengan benda-benda empirik. Ia mampu menggunakan prosedur seorang ilmuwan, yaitu menggunakan prosedur hipotetik-deduktif. Anak mampu menyelesaikan masalah dengan cara yang lebih baik dan kompleks dari pada anak yang masih dalam tahap periode operasi kongkret. Konsep konservasi telah tercapai sepenuhnya. Anak sudah mampu menggunakan hubungan-hubungan di antara objek-objek apabila ternyata manipulasi objek-objek tidak memungkinkan. Anak telah mampu melihat hubungan-hubungan abstrak dan menggunakan proposisi-proposisi logika formal termasuk aksioma dan definisi-definisi verbal. Anak juga sudah dapat berpikir kombinatorik, artinya bila anak dihadapkan kepada suatu masalah, ia dapat mengisolasi faktor-faktor tersendiri atau mengkombinasikan faktor-faktor itu sehingga menuju penyelesaian masalah tadi. Anak pada tahap ini sudah mampu melakukan penalaran dengan menggunakan hal-hal yang abstrak. Anak mampu bernalar tanpa harus berhadapan dengan objek atau peristiwanya langsung, dengan hanya menggunakan simbol-simbol, ide-ide, abstraksi dan generalisasi.

Siswa SD di Indonesia pada umumnya berusia 7-12 tahun, sehingga masuk dalam tahap operasional kongkret. Oleh karena itu pembelajarannya

disesuaikan dengan tahapannya. Berikut ini pembelajaran untuk siswa pada tahapan operasional konkret.

Tabel 1.1. *Pembelajaran pada Tahap Operasional Konkret*

Pembelajaran pada Tahap Operasional Konkret (Anak-anak Pertengahan)	
Selalu gunakan alat peraga dan alat peraga visual, terutama saat berhadapan dengan masalah yang rumit	<ul style="list-style-type: none"> • Sediakan <i>time-lines</i> untuk pembelajaran sejarah • Sediakan model tiga dimensi
Selalu memberikan kesempatan pada siswa untuk memanipulasi objek dan ide	<ul style="list-style-type: none"> • Demonstrasikan eksperimen ilmiah sederhana di mana siswa dapat berpartisipasi • Tunjukkan kerajinan tangan untuk mengilustrasikan pekerjaan sehari-hari orang-orang pada jaman dahulu
Pastikan ceramah dan bacaannya singkat dan terorganisasi dengan baik	<ul style="list-style-type: none"> • Gunakan material yang menunjukkan peningkatan ide dalam tahap demi tahap • Siswa telah membaca buku atau cerita pendek dengan singkat, buku yang logis, beralih ke bacaan yang lebih panjang hanya ketika siswa siap
Mintalah siswa untuk menangani tidak lebih dari tiga atau empat variabel pada satu waktu	<ul style="list-style-type: none"> • Membutuhkan bacaan dengan karakter terbatas • Demonstrasikan eksperimen dengan tahapan yang terbatas
Gunakan contoh yang familiar untuk membantu menjelaskan ide yang kompleks sehingga siswa memperoleh titik awal untuk mengasimilasi informasi baru	<ul style="list-style-type: none"> • Bandingkan kehidupan yang dimiliki siswa dengan karakter yang ada pada cerita • Gunakan permasalahan cerita matematika
Berikan kesempatan untuk mengklasifikasikan dan mengelompokkan objek dan ide pada tingkatan level yang kompleks	<ul style="list-style-type: none"> • Gunakan kalimat terpisah pada selembar kertas untuk membentuk suatu paragraf • Gunakan <i>outline</i>, hierarki dan analogi untuk menunjukkan pengetahuan

Pembelajaran pada Tahap Operasional Konkret (Anak-anak Pertengahan)	
	baru yang belum diketahui dengan pengetahuan yang dimiliki.
Tunjukkan masalah yang membutuhkan pemikiran penyelesaian logis dan analitis	<ul style="list-style-type: none"> • Gunakan media seperti Mind Twister, Brain Teaser, dan riddles • Fokuskan diskusi pada pertanyaan terbuka (<i>open ended</i>) yang menstimulasi pemikiran (contohnya apakah pikiran dan otak itu sama?)

Sumber: ETEC 510 Contributor (2017)

Dari tabel tersebut, terlihat bahwa dalam pembelajaran seorang guru sebaiknya membelajarkan melalui hal yang konkret dan juga menggunakan masalah yang dekat dengan siswa, serta memberikan kesempatan kepada siswa untuk mengungkapkan idenya.

1.1.2. Teori Bruner

Bruner yang memiliki nama lengkap Jerome S. Bruner seorang ahli psikologi yang telah banyak menulis tentang teori pembelajaran, proses instruksional dan filsafat pendidikan. Bruner memberikan kontribusi pada teori belajar kognitif dengan merode penemuannya (*discovery learning*). Belajar penemuan (*discovery learning*) dapat diartikan sebagai pembelajaran yang terjadi ketika siswa tidak menerima materi secara utuh, tetapi harus menyusun sendiri materi tersebut (Lefrancois, 2000). Dalam belajar penemuan ini, meminimalkan keterlibatan guru, guru dalam menyampaikan materi, guru sebagai fasilitator yang mendampingi siswa dalam belajar.

Teori Bruner ini merupakan teori konstruktivis, siswa mengkonstruksi pengetahuannya sendiri, tidak hanya sekedar menerima pengetahuan. Kelebihan dari belajar penemuan yang dikemukakan Bruner (Lefrancois, 2000) bahwasannya pembelajaran dapat memfasilitasi retensi, meningkatkan kemampuan pemecahan masalah dan meningkatkan motivasi belajar.

Menurut Bruner ada enam karakteristik dalam pertumbuhan intelektual (Bell, 1981). Pertama, pertumbuhan intelektual ditandai dengan

meningkatnya kemampuan seseorang untuk memisahkan tanggapannya dari rangsangan langsung dan spesifik. Sebagaimana orang-orang berkembang secara intelektual, mereka belajar untuk menunda, restrukturisasi dan mengontrol respon untuk memberi tekanan pada kumpulan rangsangan.

Karakteristik pertumbuhan kedua adalah perkembangan kemampuan untuk menginternalisasi peristiwa eksternal ke dalam struktur mental yang dapat menyamakan lingkungan siswa dan yang membantu siswa dalam generalisasi dari kasus tertentu. Orang-orang belajar untuk membuat prediksi dan untuk meramalkan kemungkinan informasi dengan penataan sekumpulan kejadian dan data.

Karakteristik ketiga dari perkembangan mental adalah peningkatan kemampuan untuk menggunakan kata-kata dan simbol-simbol untuk merepresentasikan hal-hal yang telah dilakukan atau akan dilakukan selanjutnya. Penggunaan kata-kata dan simbol matematika memungkinkan orang untuk melampaui intuisi dan adaptasi empiris serta menggunakan mode pemikiran logis dan analitis. Tanpa notasi simbolik, matematika akan berkembang sangat lambat dan akan memiliki aplikasi terbatas untuk pemodelan situasi fisik dan konseptual.

Karakteristik pertumbuhan keempat adalah bahwa perkembangan mental tergantung pada interaksi sistematis dan terstruktur antara siswa dan guru. "Guru" adalah siswa, orang tua, guru sekolah, atau siapapun yang memilih untuk memberi instruksi pada seseorang yang belajar. Menurut Bruner dan Piaget, perkembangan intelektual akan sangat terbelakang jika anak tidak memiliki berbagai macam hubungan dengan orang lain. Satu hal yang tidak dilakukan oleh kebanyakan guru sekolah yaitu mengeksploitasi kemampuan unik yang dimiliki siswa untuk mengajar satu sama lain. Pada banyak kesempatan, siswa lebih mampu mempelajari konsep dengan diskusi satu sama lain dan menjelaskan satu sama lain.

Karakteristik pertumbuhan Bruner yang kelima adalah bahwa pengajaran dan pembelajaran yang sangat difasilitasi penggunaan bahasa.

Dalam kelas matematika, salah satu cara utama bagi siswa untuk menunjukkan pengetahuan dan pemahaman tentang ide-ide matematika adalah melalui penggunaan bahasa untuk mengekspresikan konsep dari ide-ide yang mereka miliki.

Karakteristik keenam adalah pertumbuhan intelektual yang ditunjukkan oleh peningkatan kemampuan dalam menangani beberapa variabel secara bersamaan. Orang dengan kematangan intelektual dapat mempertimbangkan beberapa alternatif secara bersamaan dapat memberikan perhatian pada berbagai macam tuntutan pada satu waktu.

Selain mengembangkan tahap pertumbuhan intelektual, Jerome Bruner tertarik pada bagaimana anak-anak-anak menerima dan menjelaskan konsep, oleh karenanya Bruner menganjurkan *discovery learning* (belajar penemuan) dan belajar berdasarkan *hand's on activity* (Kennedy, Tipps & Johnson, 2008; Lefrancois, 2000). Tahapan dari model penyajian/representasi dari Bruner adalah tahap Enaktif, Ikonik dan Simbolik.

Model Tahap Enaktif. Tahap ini menggambarkan representasi dunia anak-anak, dan percaya bahwa anak-anak merepresentasikan dunianya ke dalam perilaku nyata. Dalam tahap ini penyajian yang dilakukan melalui tindakan anak secara langsung terlibat dalam objek fisik (nyata). Pada tahap ini anak belajar pengetahuan secara aktif, dengan menggunakan benda-benda konkret atau menggunakan situasi yang nyata.

Model Tahap Ikonik. Dalam tahap ini kegiatan penyajian dilakukan melalui serangkaian gambar-gambar atau grafik, berhubungan dengan mental yang merupakan gambaran dari objek-objek yang dimanipulasinya. Anak tidak langsung memanipulasi objek seperti yang dilakukan siswa dalam tahap enaktif. Tahap ikonik, yaitu suatu tahap pembelajaran yang dieujudkan dalam bentuk visual, gambar, atau diagram, yang menggambarkan kegiatan kongkret atau situasi kongkret yang terdapat pada tahap enaktif.

Model Tahap Simbolis. Tahap ini adalah tahap akhir dalam perkembangan representasi anak-anak. Dalam tahap ini melibatkan penggunaan kata-kata, angka atau simbol-simbol yang merepresentasikan ide

objek atau tindakan. Anak-anak pada tahap ini sudah mampu menggunakan notasi, tidak lagi menggunakan objek konkret.

Sebagai contoh, dalam mempelajari penjumlahan dua bilangan cacah, pembelajaran akan terjadi secara optimal jika mula-mula siswa mempelajari hal itu dengan menggunakan benda-benda konkret (misalnya menggabungkan 5 buah apel dengan 3 buah apel, dan kemudian menghitung banyaknya semua buah apel, kegiatan ini merupakan tahap enaktif). Kemudian, kegiatan belajar dilanjutkan dengan menggunakan gambar yang mewakili 5 buah apel dengan 3 buah apel yang kemudian digabungkan (dan kemudian dihitung banyaknya semua buah apel, dengan menggunakan gambar atau diagram tersebut/ tahap yang kedua ini disebut tahap ikonik, siswa bisa melakukan penjumlahan itu dengan menggunakan bayangan visual (*visual imagenary*) dari buah apel tersebut. Pada tahap berikutnya yaitu tahap simbolis, siswa melakukan penjumlahan kedua bilangan itu dengan menggunakan lambang-lambang bilangan, yaitu: $5 + 3 = 8$.

1.1.3 Tori Dienes

Zoltan P. Dienes adalah orang yang menggunakan ketertarikan dan pengalamannya dalam pendidikan matematika dan psikologi pembelajaran untuk mengemabangkan sistem pengajaran matematika. Menurut Dienes (Bell, 1981), konsep-konsep matematika dipelajari dalam tahap-tahap progresif yang analog dengan tahapan Piaget. Dienes membagi tahapan konsep pembelajaran matematika dalam enam tahap yaitu, 1) permainan bebas (*free play*), 2) permainan (*games*), 3) mencari kesamaan sifat (*searching for communalis*), 4) representasi (*representation*), 5) simbolisasi (*symbolization*) dan 6) formalisasi (*formalization*) (Bell, 1981).

Permainan Bebas (Free Play) merupakan tahap belajar konsep yang aktifitasnya tidak berstruktur dan tidak diarahkan. Siswa diberi kebebasan untuk mengatur benda. Selama permainan pengetahuan anak muncul. Dalam tahap ini anak mulai membentuk struktur mental dan struktur sikap dalam mempersiapkan diri untuk memahami konsep yang sedang dipelajari.

Permainan yang Menggunakan Aturan (Games), dalam permainan yang disertai aturan siswa sudah mulai meneliti pola-pola dan keteraturan yang terdapat dalam konsep tertentu. Keteraturan ini mungkin terdapat dalam konsep tertentu tapi tidak terdapat dalam konsep yang lainnya. Melalui permainan siswa diajak untuk mulai mengenal dan memikirkan bagaimana struktur matematika. Berbagai macam permainan yang merepresentasikan konsep yang berbeda akan membantu siswa untuk menemukan konsep dari elemen logika dan matematika.

Mencari kesamaan Sifat (Searching for communalities), dalam mencari kesamaan sifat siswa mulai diarahkan dalam kegiatan menemukan sifat-sifat kesamaan dalam permainan yang sedang diikuti. Untuk melatih dalam mencari kesamaan sifat-sifat ini, guru perlu mengarahkan mereka dengan menranslasikan kesamaan struktur dari bentuk permainan lain. Translasi ini tentu tidak boleh mengubah sifat-sifat abstrak yang ada dalam permainan semula.

Representasi (representation) adalah tahap pengambilan sifat dari beberapa situasi yang sejenis. Para siswa menentukan representasi dari konsep-konsep tertentu. Setelah mereka berhasil menyimpulkan kesamaan sifat yang terdapat dalam situasi-situasi yang dihadapinya itu. Representasi yang diperoleh ini bersifat abstrak, Dengan demikian telah mengarah pada pengertian struktur matematika yang sifatnya abstrak yang terdapat dalam konsep yang sedang dipelajari.

Simbolisasi (Symbolization) termasuk tahap belajar konsep yang membutuhkan kemampuan merumuskan representasi dari setiap konsep-konsep dengan menggunakan simbol matematika atau melalui perumusan verbal. *Formalisasi (Formalization)* merupakan tahap belajar konsep yang terakhir. Dalam tahap ini siswa-siswa dituntut untuk mengurutkan sifat-sifat konsep dan kemudian merumuskan sifat-sifat baru konsep tersebut.

Berdasarkan penjelasan tahapan belajar Dienes, peranan guru adalah untuk mengatur belajar anak didik dalam memahami bentuk aturan-aturan susunan benda walaupun dalam skala kecil. Siswa bermain dengan simbol dan aturan dengan bentuk-bentuk kongkret memanipulasi untuk

mengatur serta mengelompokkan aturan-aturan siswa harus mampu mengubah fase manipulasi kongkret, agar pada suatu waktu simbol tetap terkait dengan pengalaman kongkretnya.

1.1.4 Teori Gagne

Menurut Gagne (Bell, 1981), belajar dapat dikelompokkan menjadi delapan tipe pembelajaran menurut kondisi yang diperlukan pada tiap jenis pembelajaran, yaitu belajar isyarat, stimulus respon, rangkaian, asosiasi verbal, membedakan, pembentukan konsep, dan pemecahan masalah. Sebelum membahas delapan tipe pembelajaran tersebut, menurut Gagne, terdapat dua objek yang dapat diperoleh siswa dalam belajar matematika, yaitu objek langsung dan objek tak langsung (Bell, 1981). Objek tak langsung antara lain transfer pembelajaran, kemampuan menyelidiki, kemampuan memecahkan masalah, belajar mandiri, dan apresiasi terhadap matematika. Sedangkan objek langsung berupa fakta, keterampilan, konsep, dan aturan.

Fakta adalah perjanjian-perjanjian dalam matematika seperti simbol-simbol matematika, sebagai contoh simbol "5" dengan kata "lima" merupakan contoh fakta. Contoh lainnya fakta : "+" adalah simbol dari operasi penjumlahan dan sinus adalah nama suatu fungsi khusus dalam trigonometri. *Keterampilan* adalah operasi dan prosedur yang dapat digunakan siswa untuk menyelesaikan secara benar dan cepat. Beberapa keterampilan yang dapat dispesifikkan berdasarkan aturan dan instruksi disebut sebagai algoritma. Misalnya pembagian cara singkat, penjumlahan pecahan dan perkalian pecahan. *Konsep* adalah ide abstrak yang memungkinkan kita mengelompokkan objek ke dalam contoh dan bukan contoh. Himpunan, segitiga, kubus, dan jari-jari adalah merupakan konsep dalam matematika. *Prinsip* merupakan objek yang paling kompleks. Prinsip adalah sederetan konsep bersama yang berhubungan diantara konsep-konsep tersebut.

Berikutnya akan dibahas tentang tipe belajar menurut Gagne. *Belajar isyarat* adalah belajar yang tidak diniati atau tanpa kesengajaan, timbul sebagai akibat suatu rangsangan (stimulus) sehingga menimbulkan suatu

respon emosional pada individu yang bersangkutan (Bell, 1981: 111). Sebagai contoh, sikap guru dapat mempengaruhi kondisi emosional siswa, jika siswa mendapatkan pujian maka siswa akan menyenangi pembelajaran, dan jika siswa mendapat respon negatif maka dapat menyebabkan siswa tidak menyukai pembelajaran tersebut.

Belajar stimulus respon adalah belajar untuk merespon suatu isyarat, berbeda dengan pada belajar isyarat (Bell, 1981: 112). Pada belajar isyarat adalah secara tidak sengaja dan emosional, sedangkan pada tipe belajar ini belajar yang dilakukan diniati atau sengaja dan dilakukan secara fisik.

Rangkaian merupakan koneksi terurut dari dua kegiatan atau lebih aksi stimulus respon non verbal yang sudah dipelajari sebelumnya (Bell, 1981). Meskipun pembelajaran setimulus respon dapat memasukkan respon verbal dan tidak verbal, namun Gagne memilih untuk membedakannya.

Asosiasi verbal adalah rangkaian dari stimulus verbal yang secara terurut terkoneksi dengan dua atau lebih aksi stimulus respon verbal yang sudah dipelajari sebelumnya (Bell, 1981). Bentuk rangkaian dari asosiasi verbal adalah pembentukan kalimat, belajar puisi, dan belajar bahasa asing.

Pembelajaran memperbedakan adalah belajar membedakan hubungan stimulus respon sehingga bisa memahami bermacam-macam objek fisik dan konsep (Bell, 1981). Terdapat dua macam belajar memperbedakan yaitu memperbedakan tunggal dan memperbedakan jamak. Contoh memperbedakan tunggal adalah siswa dapat menuliskan angka 3 dengan menulis angka 3 sebanyak dua puluh kali. Contoh memperbedakan jamak, siswa dapat menuliskan angka 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9 dalam waktu yang sama.

Belajar konsep adalah belajar mengenal sifat bersama dari benda-benda konkret, atau peristiwa dan mengelompokkannya menjadi satu (Bell, 1981). Misalnya untuk memahami konsep segitiga siswa mengamati berbagai bentuk benda berbentuk segitiga. Berbeda dengan belajar memperbedakan yang bertujuan agar siswa dapat membedakan objek-objek berdasarkan karakteristiknya yang berlainan, sedangkan belajar

pembentukan konsep bertujuan agar siswa dapat mengklasifikasikan objek-objek ke dalam kelompok-kelompok yang memiliki karakteristik sama.

Belajar aturan adalah kemampuan untuk merespon sekumpulan situasi yang ada (stimulus) dengan sekumpulan aksi yang ada (respon) (Bell, 1981). Perkataan, tulisan, kegiatan sehari-hari dan beberapa perilaku lainnya diatur oleh aturan yang telah dipelajari. Beberapa pembelajaran matematika adalah belajar aturan, sebagai contoh sifat komutatif, asosiatif dan lain-lain.

Pemecahan masalah (Bell, 1981) adalah tipe belajar yang lebih tinggi derajatnya dan lebih kompleks daripada tipe belajar aturan. Pemecahan masalah melibatkan pemilihan dan penetapan seperangkat aturan dengan cara yang unik bagi siswa yang nantinya menghasilkan penetapan seperangkat aturan tingkat tinggi yang sebelumnya tidak diketahui oleh siswa.

1.2 arning Trajectory Matematika SD

Dalam pembelajaran matematika SD, siswa mengikuti perkembangan belajar secara natural, mengembangkan ide-ide matematika dengan caranya sendiri. Oleh karena itu diperlukan serangkaian aktivitas yang efektif yang dapat memandu siswa melampaui tingkatan-tingkatan berfikir matematika, yaitu dengan menggunakan *learning trajectory*.

Clements dan Sarama (2009) menyatakan bahwa *learning trajectory* (lintasan belajar) mempunyai tiga bagian penting yakni: tujuan pembelajaran matematika, lintasan perkembangan yang akan dikembangkan oleh siswa dalam mencapai tujuan pembelajaran, dan sekumpulan aktivitas pembelajaran atau tugas-tugas, yang sesuai dengan tingkatan berpikir yang ada pada lintasan perkembangan yang dapat membantu siswa mengembangkan proses berpikir hingga tingkat tinggi. Ketiga bagian penting dari lintasan belajar tersebut secara singkat sebagai berikut (Clements dan Sarama, 2009).

Goal  The Big Ideas of Mathematics. Bagian pertama dari sebuah *learning trajectory* adalah tujuan pembelajaran matematika. Tujuan

pembelajaran seorang guru merupakan ide-ide besar dalam matematika yakni pengelompokan konsep-konsep dan kemampuan-kemampuan yang secara matematis merupakan hal yang pokok dan saling berhubungan, konsisten dengan pemikiran siswa, serta berguna dalam pembelajaran berikutnya.

 **Development Progressions: The Paths of Learning.** Bagian kedua dari *learning trajectory* terdiri dari tingkatan-tingkatan berpikir, dari yang mudah menuju yang rumit, yang dapat membawa siswa agar dapat mencapai tujuan pembelajaran matematika. Progres perkembangan yang dibuat oleh guru menggambarkan sebuah lintasan yang akan diikuti oleh siswa dalam mengembangkan pemahaman dan keterampilan Siswa tentang suatu topik matematika. Perkembangan kemampuan matematika seseorang dimulai sejak mereka hidup di dunia, sebagai contoh, siswa mempunyai suatu kompetensi yang mirip dengan kompetensi matematika dalam hal bilangan, indera spasial, dan pola atau bentuk dari sejak lahir. Namun, ide dan interpretasi anak-anak tentang suatu situasi atau kondisi merupakan sesuatu yang unik dan berbeda dengan ide dan interpretasi yang dimiliki oleh orang dewasa. Oleh karena itu, seorang guru yang baik akan sangat berhati-hati dengan tidak mengasumsikan bahwa Siswa “melihat” situasi, masalah ataupun penyelesaian dari masalah tersebut seperti orang dewasa melihat masalah tersebut. Guru yang baik adalah guru yang mampu menginterpretasi apa yang sedang dilakukan dan dipikirkan oleh siswanya dan berusaha melihat permasalahan tersebut dari sudut pandang siswa. Sama halnya ketika guru tersebut berinteraksi dengan siswa, guru juga mempertimbangkan tugas-tugas pembelajaran serta tindakan yang guru lakukan dari sudut pandang siswa.

 **Instructional Tasks: The Paths of Teaching.** Bagian ketiga dari *learning trajectory* terdiri dari sekumpulan tugas-tugas pembelajaran yang bersesuaian dengan tingkat berpikir siswa yang ada dalam lintasan perkembangan yang telah dibuat. Tugas-tugas tersebut disusun untuk membantu siswa belajar tentang ide-ide dan kemampuan-kemampuan yang dibutuhkan untuk mencapai suatu tingkatan berpikir. Oleh karena itu, sebagai seorang guru, kita dapat menggunakan tugas-tugas tersebut

untuk mendorong perkembangan berpikir siswa dari satu level ke level berikutnya.

Lintasan belajar menggambarkan tujuan pembelajaran, proses belajar dan berpikir anak pada berbagai macam level, dan aktivitas pembelajaran yang mungkin menarik bagi mereka. Dengan *learning trajectory* pembelajaran tidak berdiri sendiri-sendiri tetapi saling berkaitan.

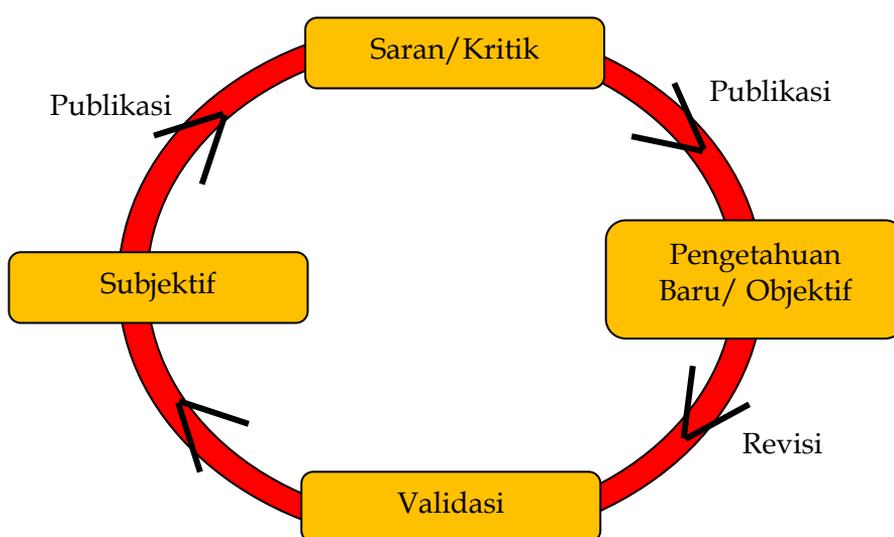
Dari penjelasan tentang *learning trajectory* memungkinkan guru untuk membangun konsep berpikir matematika secara natural. Semua tujuan dan aktivitas yang dilakukan disesuaikan dengan perkembangan kemampuan Siswa. Setiap tingkatan berpikir dengan menggunakan *learning trajectory* mendukung dalam pembentukan perkembangan berfikir selanjutnya secara natural.

1.3 Pendekatan Matematika Realistif Reflektif

Dalam pembelajaran matematika di sekolah mempunyai aspek-aspek pemahaman tentang hakekat matematika, kakekat matematika sekolah, hakekat pendidikan matematika, hakekat belajar, dan hakekat proses belajar mengajar (Marsigit, 2015). Ketika kita membicarakan suatu hal selalu berkaitan dengan dua pertanyaan yaitu apa objeknya dan apa metodenya. Pembelajaran matematika mempunyai makna yang terkandung di dalam objeknya, setiap kegiatan berpikir selalu bertanya tentang apa yang dipikirkan. Apa yang dipikirkan disebut sebagai objek dan ketika orang mempertanyakan bagaimana kita memikirkan objek disebut sebagai metode.

Menurut Marsigit (2015) objek matematika dapat dipandang secara material dan secara formal. Secara material objek matematika dapat berupa benda konkret, roda berbentuk lingkaran, atap rumah berbentuk limas, piramida-piramida di Mesir, dan lain-lain. Sedangkan secara formal objek matematika berupa benda pikir yang diperoleh melalui benda konkret melalui "abstraksi" dan "idealisasi", sebagai contoh dari kubus yang terbuat dari kayu jati maka dengan abstraksi kita hanya mempelajari bentuk dan ukuran saja.

Dalam mempelajari matematika dapat dicapai atas dasar pemahaman tentang pengetahuan matematika yang bersifat objektif dan pelaku matematika yang bersifat subjektif di dalam usahanya untuk memperoleh justifikasi, tentang kebenaran matematika melalui kreasi, formulasi, representasi, publikasi dan interaksi. Hubungan antara pengetahuan objektif dan subjektif serta hakekat belajar matematika yang dikembangkan berdasar Ernest, P (Marsigit, 2015) adalah sebagai berikut.



Gambar 1.1. Hakekat Sistem Belajar Matematika diadopsi dari Ernest, P

Gambar 1.1. di atas merupakan hubungan antara pengetahuan objektif dan pengetahuan subjektif. Bahwasannya pengetahuan pada awalnya bersifat subjektif, kemudian melalui publikasi dengan cara mengerjakan soal, diskusi maka akan memperoleh saran atau kritik. Saran atau kritik juga akan dipublikasi dengan bentuk koreksi, nilai, oral atau tulisan sehingga akan memunculkan pengetahuan baru yang objektif. Dalam perkembangannya pengetahuan baru yang objektif tadi dapat direvisi, tentu saja revisi memerlukan validasi sehingga dapat menjadi pengetahuan yang subjektif lagi, dan diperlukan publikasi kembali untuk menjadi objektif. Oleh karena itu pengetahuan baru yang masih ada pada lingkup

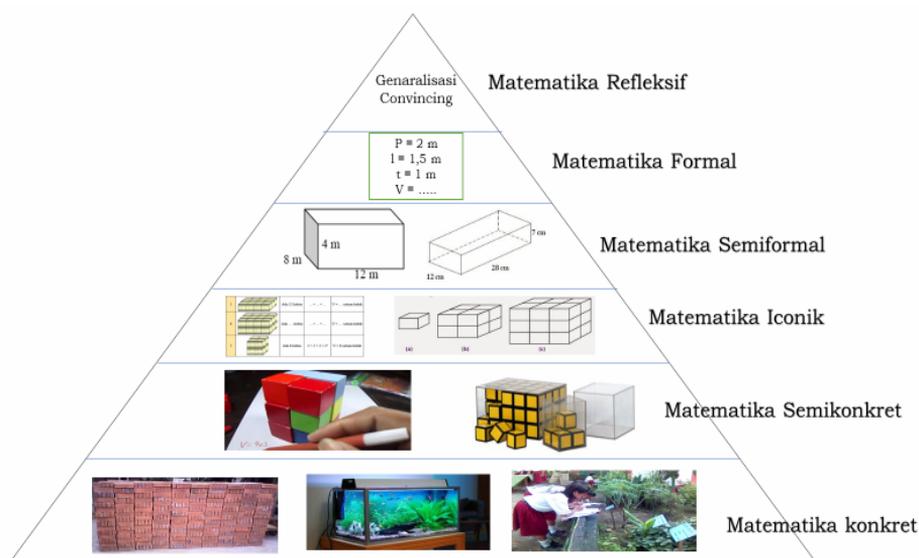
individu disebut pengetahuan subjektif, sedangkan pengetahuan baru dalam lingkup sosial disebut sebagai pengetahuan objektif.

Berdasarkan teori belajar yang sudah dibahas sebelumnya, bahwasannya menurut Piaget, Bruner, Dienes dan Gagne dalam proses belajar Matematika didasarkan pada tahap perkembangan siswa. Pembelajaran Matematika di sekolah dasar hendaknya dimulai dari matematika konkret menuju matematika formal, dan tahapan yang paling tinggi adalah ketika siswa mampu mengkomunikasikan apa yang sudah diperolehnya dengan cara berpikir reflektif. Oleh karena itu perlu dikembangkan pendekatan matematika realistik reflektif. Pendekatan matematika realistik reflektif merupakan pengembangan dari pendekatan realistik, teori bruner dan berfikir reflektif.

Dalam matematika terdapat dua model berfikir, yaitu berfikir secara intuitif dan reflektif (Skemp, 1977). Pada level intuitif siswa menyadari sesuatu melalui lingkungannya yang biasanya dengan melihat atau mendengar. Dari menyadari kemudian secara otomatis mengkalifikasikan dan menghubungkannya dengan yang lain. Dalam beberapa hal, aktivitas yang diperoleh dari berpikir intuitif dapat meraih kesuksesan tanpa disertai proses mental. Sedangkan pada berfikir reflektif, ditandai dengan aktivitas mental yaitu kesadaran introspeksi. Dalam berfikir reflektif kita diharapkan mampu menjelaskan apa yang sudah kita lakukan. Sebagai contoh, secara intuitif dapat dengan mudah memperoleh jawaban 16×25 . Selanjutnya dalam tahapan berfikir reflektif, ketika ditanyakan darimana memperoleh 16×25 , maka akan dengan mudah untuk menjelaskan cara memperolehnya, misalkan dengan menggunakan sifat asosiatif perkalian.

Dalam pendekatan matematika realistik reflektif, pembelajaran berangkat dari matematika konkret dan menuju ke matematika formal, yang mengadaptasi dari teori bruner. Dalam teori Bruner tahapan pembelajaran matematika dari tahap enaktif, ikonik dan simbolik. Tahapan dari matematika konkret menuju matematika formal merupakan pengetahuan subjektif, selanjutnya dalam prosesnya diharapkan dapat membangun pengetahuan objektif. Pengetahuan objektif dapat terbentuk melalui publikasi, sehingga ada tahapan berpikir reflektif. Tahapan

berpikir reflektif ini dalam bentuk mempublikasikan pengetahuan subjektif agar dapat diperoleh pengetahuan objektif. Tahapan dari pendekatan tersebut digambarkan dalam *Mountain* yang merupakan pengembangan dari *Iceberg Moorlands*, dikaitkan dengan teori Bruner dan berpikir reflektif. Berikut ini adalah gambar dari tahapan mulai dari matematika konkret sampai dengan berpikir reflektif.



Gambar 1. 2. *Mountain Pendekatan Matematika Realistik Reflektif*

Dari gambar 1.2 di atas, terlihat bahwa tahapan dari pembelajaran matematika terdiri dari matematika konkret, semi konkret, ikonik, semi formal, formal, dan reflektif.

Matematika *konkret* adalah pembelajaran matematika yang dikaitkan dengan aktivitas sesuai dengan kehidupan sehari-hari. Selanjutnya matematika *semikonkret* adalah tahapan pembelajaran matematika di mana siswa memanipulasi media atau alat peraga sebagai model objek yang dipelajari. Setelah melalui tahap konkret dan semi konkret, siswa akan beranjak ke tahap ikonik dan semi formal. Tahapan *ikonik* adalah kegiatan anak yang berkaitan dengan mental yaitu melalui kegiatan mengamati gambaran dari objek yang dimanipulasinya. Selanjutnya tahapan semi

formal adalah tahapan di mana kegiatan anak berkaitan dengan model yang dapat dimungkinkan digunakan untuk menyelesaikan semua masalah matematika. Tahap terakhir sebagai pemikiran subjektif adalah matematika formal. Matematika *formal* adalah siswa sudah dapat menuliskan dan menyelesaikan masalah matematika dengan notasi formal. Di sinilah siswa menggunakan pemikirannya tanpa bergantung lagi pada model matematika yang digunakan sebelumnya (model formal). Tahapan dari matematika konkret menuju ke matematika formal masih merupakan pengetahuan yang subjektif, untuk menjadikannya pengetahuan objektif adalah diperlukan publikasi, dalam hal ini diperlukan tahap matematika reflektif. Matematika *reflektif* adalah tahapan dimana siswa mengkomunikasikan apa yang sudah diperoleh untuk merefleksikan kembali kebenaran yang diperoleh dan memperoleh masukan dari teman-teman dan juga guru sehingga menghasilkan pengetahuan yang objektif.

-oo0oo-

2

MATEMATIKA KONKRET

2.1 Pengertian Matematika Konkret

Peserta didik mempelajari matematika dapat dengan menggunakan sesuatu yang “konkret” atau “nyata”, yang berarti dapat diamati dengan menggunakan panca indera. Peserta didik dalam belajar konsep, dapat dengan memanipulasikan, menyusun, mengutak-ngatik benda-benda real atau dengan mengalami peristiwa di dunia sekitarnya.

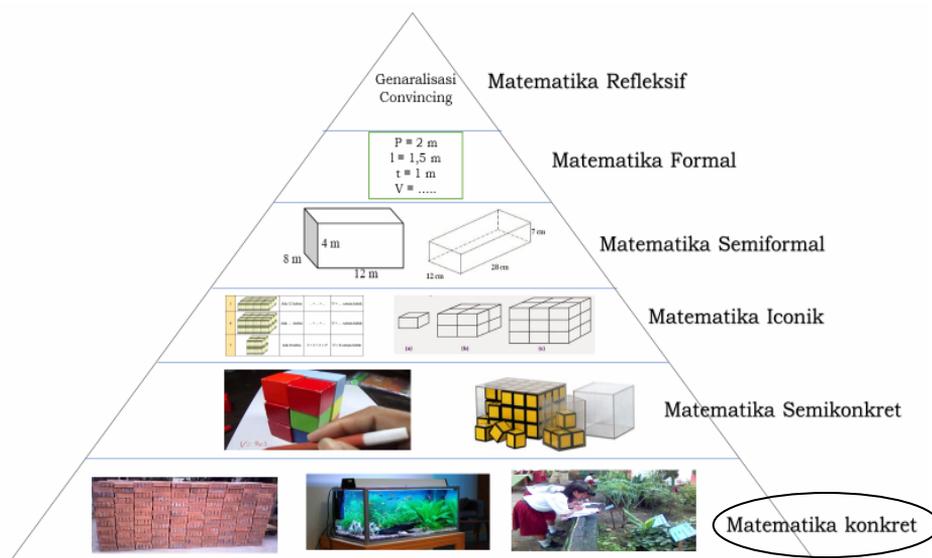
Thompson (1994) menyebutkan benda-benda konkret digunakan untuk menunjang usaha siswa sebagai proses matematisasi konkret ke abstrak. Siswa perlu diberi kesempatan agar dapat mengkonstruksi dan menghasilkan matematika dengan cara dan bahasa mereka sendiri. Diperlukan kegiatan refleksi terhadap aktivitas sosial sehingga dapat terjadi pepaduan dan penguatan hubungan antar pokok bahasan dalam struktur pemahaman matematika

Menurut Ebbutt dan Straker (Marsigit: 2013) Matematika Sekolah atau *School Mathematics* didefinisikan sebagai kegiatan atau aktivitas siswa menemukan pola, melakukan investigasi, menyelesaikan masalah dan mengomunikasikan hasil-hasilnya; dengan demikian sifatnya lebih konkret. Senada hal tersebut menurut Hans Freudental dalam Marsigit (2013) matematika merupakan aktivitas insani (*human activities*) dan harus

dikaitkan dengan realitas. Matematika sekolah dasar merupakan kegiatan siswa dalam menemukan pola, melakukan investigasi, menyelesaikan masalah dan mengomunikasikan hasil-hasilnya yang berhubungan dengan materi matematika dasar yang diajarkan di SD.

2.2 Kedudukan Matematika Konkret

Dalam *mountain* matematika realistik refleksif matematika konkret berada pada tahap ke-1. Pada tahap ini anak belajar matematika melalui aktivitas yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari. Kegiatan anak bisa melalui kegiatan mengamati, melakukan aktivitas riil yang berkaitan dengan matematika. Secara visual kedudukan matematika konkret dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 2.1. *Mountain Matematika Realistik Refleksif Tahap Matematika Konkret*

Melalui aktivitas ini harapannya siswa memperoleh pengalaman nyata terkait matematika sehingga siswa dapat memperoleh pengetahuan berdasarkan pengalamannya tersebut.

2.3 Pembelajaran

2.3.1 Bilangan

a. Penjumlahan

Materi penjumlahan pada tahap matematika konkret dilakukan melalui aktivitas-aktivitas menjumlahkan yang berkaitan dengan kehidupan sehari-hari. Pembelajaran matematika akan lebih mudah dan bermakna jika diajarkan kepada siswa menggunakan benda-benda yang ada di sekitar. Misalnya siswa melakukan aktivitas menjumlahkan permen yang dia dapatkan dari siswa lain. Siswa SD akan lebih mudah dalam memahami konsep matematika apabila dibelajarkan menggunakan benda konkret.



Gambar 2.2. Contoh aktivitas penjumlahan

Guru meminta beberapa siswa untuk maju ke depan kelas. Salah satu siswa memegang 3 permen, setelah itu ada siswa lain memberikan kepadanya sebanyak 2 permen. Siswa yang mendapatkan permen diminta untuk menghitung jumlah permen yang dia miliki. Permen yang dia miliki saat ini sebanyak 5 permen. Beberapa permen apabila ditambahkan dengan permen lain akan menjadi semakin banyak, sehingga siswa akan memahami bahwa konsep penjumlahan adalah sesuatu yang ditambahkan.

b. Pengurangan

Sama halnya seperti pada pembelajaran penjumlahan, pembelajaran matematika materi pengurangan juga dapat diawali melalui aktivitas mengurangi dengan menggunakan benda konkret yaitu menghitung permen.



Gambar 2.3. Contoh aktivitas pengurangan

Pada gambar di atas terlihat aktivitas siswa melakukan kegiatan pengurangan menggunakan permen sebagai aktivitas konkret yang digunakan dalam pembelajaran. Pengurangan dapat dimaknai siswa sebagai “pengambilan sesuatu” sehingga dapat menunjukkan pengurangan secara langsung. Sesuatu yang diambil pasti akan berkurang dan siswa akan mendapatkan konsep bahwa pengurangan itu akibat dari sesuatu yang berkurang.

c. Perkalian

Konsep perkalian sama seperti pada penanaman konsep penjumlahan. Karena pada prinsipnya perkalian adalah penjumlahan yang berulang. Aktivitas- aktivitas riil yang digunakan sebagai wahana belajar dalam pembelajaran perkalian dapat dilakukan dengan menghitung.



Gambar 2.4. Contoh aktivitas perkalian

Aktivitas yang dilakukan adalah dengan penjumlahan berulang menghitung jumlah kaki meja yang ada di kelas. Setiap meja mempunyai kaki berjumlah 4. Siswa menghitung jumlah kaki beberapa meja. Berapa jumlah seluruh kaki meja yang ada di dalam kelas?. Siswa diajarkan konsep perkalian dengan cara menjumlahkan secara berulang kali, sehingga siswa akan memahami bahwa perkalian merupakan penjumlahan yang berulang.

d. Pembagian

Pembelajaran matematika materi pembagian menggunakan benda konkret dapat dilakukan melalui aktivitas bersama beberapa siswa lain menggunakan buah apel, jeruk, dll.



Gambar 2.5. Contoh aktivitas pembagian

Pembelajaran menggunakan buah sebagai benda konkret digunakan dalam materi pembagian. Salah satu siswa mempunyai 10 buah kemudian memberikan kepada kelima temannya dengan jumlah yang sama rata sampai tak ada sisa buah yang dia miliki. 10 buah akan habis diberikan kepada kelima siswa lain dengan jumlah yang sama banyak, sehingga siswa memahami bahwa konsep pembagian merupakan pengurangan secara berulang-ulang sampai tidak ada yang tersisa.

e. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Pembelajaran matematika pada materi KPK, memahamkan siswa mengenai kelipatan suatu bilangan dapat dikaitkan dengan kehidupan nyata, misalkan aktivitas bertepuk tangan ketika guru menyebutkan kelipatan suatu bilangan.



Gambar 2.6. Contoh aktivitas pembelajaran KPK dengan tepuk tangan

Aktivitas konkret dapat dilakukan dengan sebuah permainan. Permainan tersebut misalnya, pada saat guru menyebutkan kelipatan angka 2 (2, 4, 6, 8, 12) siswa perempuan bertepuk tangan. Pada saat guru menyebutkan kelipatan angka 3 (3, 6, 9, 12) siswa laki-laki bertepuk tangan. Siswa akan bersama-sama bertepuk tangan pada saat kelipatan bilangan masing-masing disebutkan oleh guru, sehingga siswa akan memahami bahwa ketika mereka bersama-sama bertepuk tangan adalah suatu kelipatan bilangan dari 2 dan 3.

f. Faktor Persekutuan Terbesar FPB

Sebelum menjelaskan tentang materi FPB, siswa harus mengerti terlebih dahulu apakah yang disebut dengan faktor. Faktor merupakan suatu bilangan yang dapat membagi bilangan sampai habis. Faktor disebut juga dengan bilangan prima.



Gambar 2.7. Contoh aktivitas faktor pembagian

Siswa dapat melakukan aktivitas dengan mengumpulkan beberapa permen dengan 2 rasa yang berbeda. Sebanyak 15 permen rasa coklat dan 20 permen rasa buah. Aktivitas dilakukan dengan percobaan membagikan semua permen kepada 2 orang siswa, 3 orang siswa, 4 orang siswa, sampai 5 orang siswa sehingga seluruh permen tersebut terbagi habis dan sama rata. Setelah dibagikan kepada 5 orang siswa, ternyata seluruh permen habis dan setiap siswa mendapatkan 3 permen rasan coklat dan 4 permen rasa buah. Setelah melakukan aktivitas tersebut, maka siswa akan memahami bahwa konsep FPB merupakan sebuah faktor bilangan pembagi, yaitu bilangan 5 sebagai faktor pembagi dari 15 dan 20.

g. Pecahan

Pecahan merupakan materi yang diajarkan kepada siswa SD dengan menggunakan konsep pembagian. Pembagian dalam pecahan dapat kita kaitkan dengan kehidupan nyata, misalkan menggunakan roti/ pizza.



Gambar 2.8. Contoh aktivitas pecahan

Pada gambar di atas terlihat pembelajaran menggunakan roti/ pizza sebagai benda konkret yang digunakan dalam pembelajaran pecahan. Roti/ pizza yang utuh berbentuk lingkaran kita belah dan kita bagi menjadi beberapa bagian sama besar. Sebagai contoh pizza tersebut kita belah dan kita bagi menjadi 8 bagian yang sama besar. Siswa memegang roti bagian masing-masing. Setelah mendapatkan jumlah potongan pizza kecil, maka kita dapat menjelaskan kepada siswa bahwa salah satu dari pizza kecil itu merupakan 1 dari 8 bagian pizza. Disini siswa mengetahui bahwa 1 roti dibagi menjadi 8 hasilnya adalah setiap siswa mendapatkan $\frac{1}{8}$ bagian sama besar.

2.2 Geometri dan Pengukuran

2.2.1 Geometri Bidang

a. Persegi

Pada materi geometri bidang khususnya bentuk persegi, tahap matematika konkret dapat menggunakan benda-benda disekitar yang berbentuk persegi. Keramik/ubin yang ada di dalam kelas dapat menjadi contoh konkret yang dapat diamati oleh siswa secara langsung.



Gambar 2.9. *Aktivitas Mengamati Ubin kelas*

Siswa melihat bahwa benda yang berbentuk persegi mempunyai ukuran sisi yang sama. Selain keramik/ ubin, siswa juga dapat mengamati ternit di dalam kelas. Siswa dapat menuliskan ciri-ciri dan sifat-sifat bangun datar persegi, sehingga siswa dapat menyimpulkan bahwa persegi mempunyai 4 sisi yang sama panjang dan 4 sudut yang sama besar.

b. Persegi Panjang

Setelah siswa mengetahui bentuk persegi, selanjutnya siswa diperkenalkan dengan bentuk bangun datar persegi panjang. Siswa mengamati benda yang ada disekitar yang mempunyai bentuk persegi panjang. Papan tulis, pintu, buku, jendela, merupakan benda-benda yang selalu ditemui siswa dan berbentuk persegi panjang.



Gambar 2.10. *Aktivitas Mengamati Papan Tulis*

Dengan mengamati benda-benda tersebut, siswa dapat menelihat benda yang mirip dengan persegi yang sama-sama memiliki 4 sisi, akan tetapi mempunyai panjang sisi yang berbeda, merupakan bangun datar persegi

panjang. Sisi panjang berjumlah 2 sisi, dan sisi pendek berjumlah 2 sisi. Sisi panjang dinamakan panjang, dan sisi pendek dinamakan lebar. Sehingga bangun persegi panjang mempunyai 2 panjang dan 2 lebar.

c. Segitiga

Pada tahap matematika kongkrit, segitiga dapat dikenalkan pada anak melalui benda-benda yang ada di sekitar. Benda berbentuk segitiga dapat ditemui anak dilingkungannya, seperti pada rumah bagian atas yang terlihat dari samping. Bagian atas rumah tersebut menunjukkan bentuk segitiga.



Gambar 2.11. *Tenda Segitiga*

Selain itu, pada saat kegiatan pramuka atau kemah anak dapat melihat bentuk pintu tenda yang sudah didirikan berbentuk segitiga. Siswa akan memahami bahwa bentuk segitiga merupakan bentuk yang mempunyai 3 sisi dan 3 sudut.

d. Trapesium

Bentuk trapesium memang jarang ditemui didalam kehidupan sehari-hari. Benda yang dapat dipergunakan untuk mengenalkan kepada siswa tentang bentuk trapesium adalah tas jinjing. Tas jinjing ini biasanya digunakan oleh para wanita/ibu-ibu. Tas tersebut ada yang didesain berbentuk trapesium.

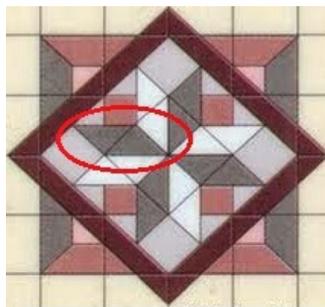


Gambar 2.12. Tas Berbentuk Trapesium

Dengan contoh benda berupa tas tersebut, anak dapat mengamati secara langsung bentuk trapesium itu seperti apa. Trapesium mempunyai 4 sisi, 2 sisi atas dan bawah yang sejajar dan berbeda panjangnya, serta 2 sisi miring yang ada di samping.

e. Jajar Genjang

Bangun datar yang berbentuk jajargenjang jarang sekali ditemui didalam kehidupan sehari-hari. Bentuk jajargenjang dapat dikatakan unik karena memang benda yang mempunyai bentuk seperti ini sangat sedikit. Ornamen pada hiasan dinding atau keramik, dapat dimanfaatkan untuk mengenalkan bentuk jajargenjang pada siswa.



Gambar 2.13. Ornamen Berbentuk Jajargenjang

Siswa mengamati bentuk tersebut, sehingga siswa akan memahami bahwa sisi-sisi yang berhadapan pada bangun datar jajar genjang

mempunyai ukuran panjang yang sama. Selain itu, sisi miring pada bangun datar jajar genjang mempunyai kemiringan yang sama.

f. Belah Ketupat

Bentuk bangun datar belah ketupat pada tahap matematika konkrit dapat diamati melalui buah nanas. Kulit luar pada buah nanas berbentuk belah ketupat kecil-kecil yang berjumlah banyak.



Gambar 2.14. Nanas dan Ketupat Berbentuk Belah Ketupat

Selain buah nanas, bentuk bangun datar belah ketupat juga dapat dilihat melalui makanan ketupat yang biasanya dibuat menjelang hari raya Idul Fitri. Ketupat dapat dijadikan benda konkrit dalam mengajarkan bentuk belah ketupat sehingga siswa akan memahami bahwa bentuk belah ketupat merupakan bentuk yang mempunyai 4 sisi yang sama panjang.

2.2.2 Geometri Ruang

a. Kubus

Pada tahap matematika konkrit dalam memperkenalkan siswa dengan geometri ruang bentuk kubus, siswa dapat dengan mengamati benda bentuk kubus secara langsung yang dapat ditemui dalam kehidupan sehari-hari melalui benda-benda disekitar. Kardus, kotak mainan, kotak kado, dll merupakan benda-benda yang berbentuk kubus dan dapat ditemui oleh siswa dalam kehidupan sehari-hari.

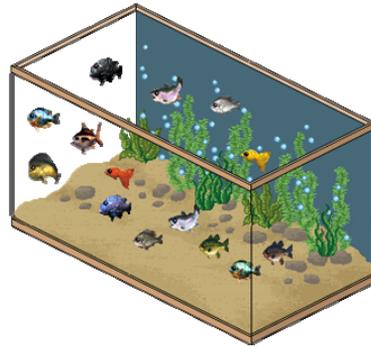


Gambar 2.15. *Benda Berbentuk Kubus*

Benda berbentuk kubus salah satunya adalah dadu. Pada saat siswa bermain ular tangga, mereka pasti akan menggunakan dadu sebagai salah satu alat bermainnya. Dadu tersebut mempunyai bentuk kubus. Dengan mengamati dadu tersebut, siswa akan memahami bahwa kubus merupakan sebuah bentuk yang mempunyai 6 sisi sama besar dan mempunyai 12 rusuk yang sama panjang.

b. Balok

Balok merupakan bentuk geometri ruang yang mirip dengan kubus. Menggunakan benda langsung dan nyata yang berbentuk balok, akan memberikan konsep yang benar terhadap siswa agar dapat membedakan bangun ruang balok dan tidak tertukar dengan bangun ruang kubus. Jika menggunakan benda-benda yang berbentuk balok, maka harus benar-benar benda yang berbentuk balok, seperti penghapus yang berbentuk balok, akuarium, tempat tisu, dll.

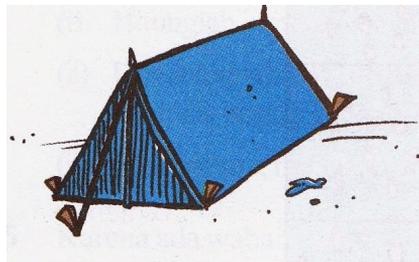


Gambar 2.16. Benda Berbentuk Balok

Bentuk balok memang mirip dengan kubus, akan tetapi siswa harus benar-benar mengamati bahwa balok mempunyai 4 sisi yang berbentuk persegi panjang dan 2 sisi yang memiliki bentuk sama. Dengan mengamati secara langsung, siswa dapat memahami bahwa balok merupakan bentuk yang berbeda dengan kubus dan balok mempunyai 6 bidang sisi (4 persegi panjang, 2 persegi) dan 12 rusuk (4 rusuk sama panjang, 8 rusuk sama panjang).

c. Prisma

Pada tahap matematika konkrit, benda yang dipergunakan untuk mengenalkan siswa terhadap bangun prisma dapat dilakukan dengan mengamati atap rumah secara keseluruhan. Bagian atas sebuah rumah mempunyai bentuk prisma, dari depan sampai belakang.



Gambar 2.17. Tenda Berbentuk Prisma

Selain mengamati bagian atas rumah, siswa juga dapat mengamati bentuk tenda kemah. Pada saat kegiatan pramuka atau kemah, siswa membuat tenda untuk dijadikan rumah. Rumah dari tenda tersebut mempunyai bentuk prisma. Sehingga dengan mengamati benda tersebut, siswa dapat memahami bahwa prisma merupakan bentuk yang mempunyai 2 sisi segitiga serta 3 sisi berbentuk persegi panjang. Jumlah rusuk pada prisma sebanyak 9 rusuk (3 rusuk sama panjang, 6 rusuk sama panjang).

d. Limas

Limas merupakan salah satu bentuk geometri ruang. Pada tahap matematika konkret, siswa diperkenalkan dengan bentuk limas menggunakan benda yang dapat ditemui secara langsung. Limas mempunyai bentuk lancip pada sudut atasnya, akan tetapi mempunyai alas yang berbeda-beda. Limas mempunyai alas berbentuk segi empat dan segitiga.



Gambar 2.18. Benda Berbentuk Limas

Bentuk limas dapat ditemui dalam kehidupan sehari-hari berupa bagian atas sebuah masjid. Siswa akan memahami bahwa bentuk limas atas masjid merupakan limas segi empat karena mempunyai alas yang berbentuk segi empat. Limas segitiga dapat diamati melalui mainan rubrik yang berbentuk limas dan alasnya berbentuk segitiga. Siswa memahami bahwa limas merupakan bentuk yang mempunyai alas berbentuk segitiga atau segiempat yang mempunyai sisi tegak sejumlah bentuk alasnya.

e. Tabung

Pada tahap matematika konkrit, benda yang berupa tabung mudah ditemui pada kehidupan sehari-hari. Siswa dapat mengamati bentuk tabung melalui benda yang ada disekitar seperti drum, kaleng minuman, ataupun bedug masjid.



Gambar 2.19. Benda Berbentuk Tabung

Tabung merupakan benda bangun ruang yang berbentuk lingkaran pada alasnya. Dengan melihat dan mengamati secara langsung, siswa dapat memahami bahwa benda yang berbentuk tabung mempunyai alas dan atap berbentuk lingkaran. Alas dan atap dapat berupa tutup apabila benda tersebut adalah sebuah tempat makanan atau minuman. Selain itu siswa dapat memahami bahwa tabung mempunyai alas dan atap yang sama besar dan mempunyai 1 sisi yang melingkar sesuai bentuk alas dan atapnya.

f. Kerucut

Tahap matematika konkrit bangun ruang berbentuk kerucut, benda yang dipergunakan untuk diperkenalkan kepada siswa dapat menggunakan capping. Capping yang sering digunakan di kepala merupakan benda yang berbentuk kerucut. Siswa dapat mengamati dan menggunakannya secara langsung.



Gambar 2.20. Benda Berbentuk Kerucut

Siswa mengetahui bahwa benda yang berbentuk kerucut merupakan benda yang mempunyai alas berbentuk lingkaran dan mempunyai sudut lancip di atasnya. Selain mempunyai alas yang berbentuk lingkaran, kerucut juga mempunyai 1 sisi yang melingkar sesuai dengan alasnya.

-oo0oo-

3

MATEMATIKA SEMI KONKRET

3.1 Pengertian Matematika Semi Konkret

Pembelajaran matematika pada tahap semi konkret menekankan pada aktivitas siswa memanipulasi benda- benda konkret. Berbeda dengan tahap sebelumnya, yaitu matematika konkret siswa belajar matematika melalui aktivitas yang berkaitan dengan kehidupan sehari - hari, pada tahap semi konkret anak belajar menggunakan media atau alat peraga yang relevan. Alat peraga ini digunakan sebagai bantuan dari proses berpikir, dimana dapat mendapat gambaran dalam pikirannya tentang benda atau peristiwa yang dialami dan dikenalnya pada tahap pembelajaran menggunakan benda konkret.

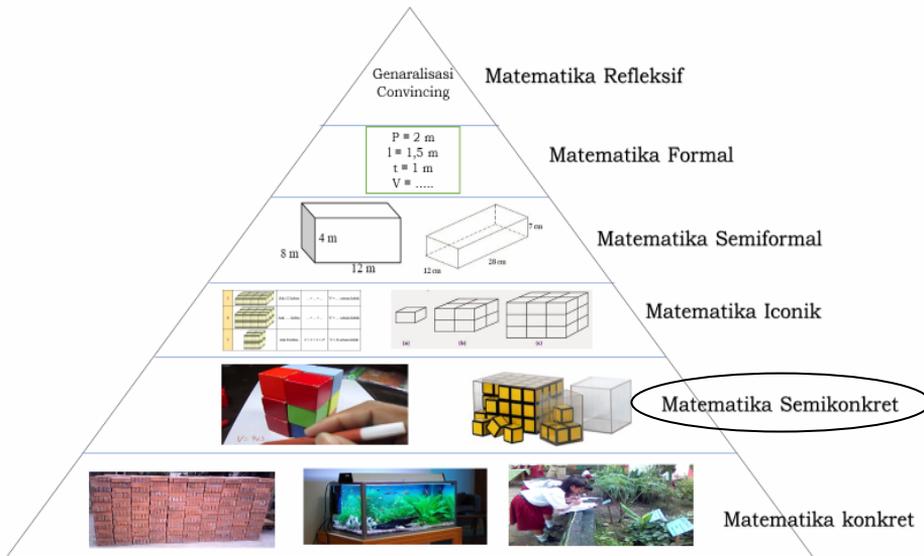
Alat peraga dan media pembelajaran dapat menjadi sarana dalam memanipulasi objek-objek. Hal tersebut sangat penting bagi siswa dalam pembelajaran matematika Sekolah Dasar untuk menurunkan keabstrakan dari konsep. Siswa dengan melihat, meraba, dan memanipulasi alat peraga atau media maka anak mempunyai pengalaman nyata dalam kehidupan tentang arti konsep sehingga siswa mampu menangkap konsep yang dipelajari.

Media dan alat peraga pembelajaran digunakan guru ketika mengajar untuk membantu memperjelas materi pelajaran, untuk menerangkan atau mewujudkan konsep matematika. Misalnya ketika akan membahas penjumlahan dan pengurangan di awal pembelajaran, anak

tersebut tidak lagi mengamati benda-benda secara langsung namun menggunakan media atau alat peraga relevan untuk mendapatkan konsep mengenai materi tersebut.

3.2 Kedudukan Matematika Semi Konkret

Dalam *mountain* matematika realistik reflektif matematika konkret berada pada belajar matematika tahap memanipulasi alat peraga maupun benda – benda yang bisa digunakan sebagai sumber belajar. Kegiatan anak bisa melalui kegiatan mengamati atau melakukan aktivitas memanipulasi media. Secara visual kedudukan matematika semi konkret dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 3.1. Mountain Matematika Realistik Reflektif Tahap Matematika Semikonkret

3.3 Pembelajaran

3.3.1 Bilangan

a. Penjumlahan

Setelah mendapatkan konsep penjumlahan pada tahap matematika konkret, pembelajaran matematika semi konkret pada materi penjumlahan dapat dilakukan menggunakan berbagai media. Media yang digunakan dapat berupa benda atau alat peraga untuk memudahkan siswa lebih memahami tentang konsep penjumlahan.



Gambar 3.2. *Aktivitas Menggunakan Media penjumlahan kancing baju*

Konsep penjumlahan dapat dilakukan menggunakan alat peraga berupa kancing baju. Selain kancing baju, dapat juga menggunakan sedotan atau lidi agar memudahkan siswa menghitung dan menjumlahkan. Siswa melakukan aktivitas penjumlahan menggunakan suatu media pembelajaran sehingga siswa dapat secara langsung memegang atau mengotak-atik sendiri sesuai pemikiran mereka. Kegiatan seperti itu akan membuat siswa mengkonstruksi pikiran dan akan menemukan konsep penjumlahan berasal dari sesuatu yang bertambah.

b. Pengurangan

Pada pembelajaran materi pengurangan, sama halnya dengan materi penjumlahan. Pembelajaran dapat dilakukan dengan media berupa kancing baju, lidi, sedotan, pensil, maupun media yang lainnya. Pembelajaran juga berupa aktivitas nyata yang dilakukan oleh siswa itu sendiri.

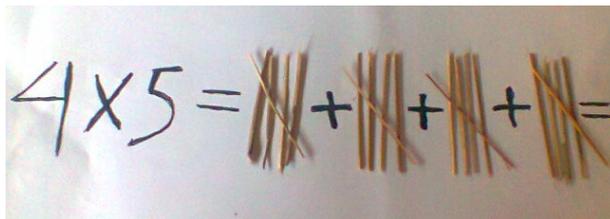


Gambar 3.3. *Aktivitas Menggunakan Media pengurangan kancing baju*

Siswa melakukan aktivitas pengurangan menggunakan suatu media pembelajaran sehingga siswa dapat secara langsung memegang atau mengotak-atik sendiri sesuai pemikiran mereka. Kegiatan seperti itu akan membuat siswa mengkonstruksi pikiran dan akan menemukan konsep pengurangan berasal dari sesuatu yang berkurang.

c. Perkalian

Pada pembelajaran matematika materi perkalian, siswa sebelumnya sudah dibelajarkan konsep perkalian pada tahap matematika konkret. Perkalian merupakan penjumlahan yang berulang. pada tahap matematika semi konkret, siswa dapat melakukan perkalian menggunakan alat peraga sehingga siswa lebih mendalami konsep tentang perkalian.



Gambar 3.4. *Media perkalian menggunakan lidi*

Media yang digunakan juga dapat berupa lidi, sedotan dll. Pada gambar ditunjukkan pembelajaran matematika materi perkalian dapat menggunakan lidi untuk memudahkan siswa menghitung hasil perkalian. Terlihat bahwa perkalian 4×5 adalah menggunakan lidi yang dikelompokkan sejumlah 5 buah ditambahkan dengan kelompok lidi lain dengan jumlah yang sama sebanyak 4 kali. Didapatkan hasil perkalian 4×5 dari penjumlahan yang berulang berupa $5+5+5+5$ sehingga menghasilkan 20 lidi. Siswa akan lebih memahami bahwa konsep perkalian merupakan penjumlahan yang berulang.

d. Pembagian

Pembelajaran matematika materi pembagian pada tahap semi konkret, dapat dilakukan seperti halnya pada materi perkalian. Media yang digunakan juga tak jauh berbeda dari materi sebelumnya. Penggunaan media berupa kelereng, lidi, sedotan pensil, dll tetap digunakan dalam pembelajaran matematika tahap semi konkret.



Gambar 3.5. *Aktivitas pembagian Menggunakan Media kelereng*

Pada gambar di atas terlihat pembelajaran menggunakan alat peraga kelereng dan wadah transparan yang digunakan dalam pembelajaran pembagian

e. Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Setelah siswa memahami konsep awal dari penjumlahan dan faktor bilangan pada tahap konkret, siswa dapat menggunakan media pembelajaran pada materi KPK. Siswa secara langsung dapat mengamati maupun menggunakan media tersebut sehingga memudahkan siswa untuk benar-benar memahami konsep KPK.



Gambar 3.6. Media papan bilangan

Dalam pembelajaran materi KPK, siswa terlebih dahulu sudah memahami tentang konsep kelipatan bilangan pada saat melakukan aktivitas bertepuk tangan pada bab sebelumnya. Disini siswa menggunakan sebuah media pembelajaran agar siswa lebih memahami konsep KPK. Dengan menggunakan papan bilangan seperti yang ditunjukkan pada gambar, siswa dapat merencanakan kegiatan masing-masing. Misal, siswa A dan B mengikuti les secara bersama-sama di tempat les yang sama. Siswa A berangkat les setiap 3 hari sekali dan siswa B setiap 4 hari sekali. Kapan mereka akan bertemu untuk les bersama-sama lagi?. Kegiatan dapat dilakukan dengan cara melingkari kelipatan bilangan jadwal les mereka. Sehingga didapatkan pada hari ke 12, 24, 36, dan seterusnya. Mereka akan mengikuti les pada hari yang sama. Hari itu adalah hari kelipatan dari jadwal siswa. Untuk mencari Kelipatan persekutuan terkecil, maka hari ke 12 adalah angka terkecil dari kelipatan tersebut. Dari kegiatan

pembelajaran tersebut, siswa akan mendapatkan sebuah jawaban hari dimana siswa A dan siswa B bersama-sama mengikuti les untuk yang pertama kalinya, yaitu pada hari ke 12.

f. Faktor Persekutuan Terbesar FPB

Pada pembelajaran matematika tahap semi konkret materi FPB, siswa dapat melakukan kegiatan dengan menggunakan media pembelajaran berupa kartu bilangan, kalender, maupun papan bilangan yang dimodifikasi oleh guru untuk membelajarkan materi FPB.

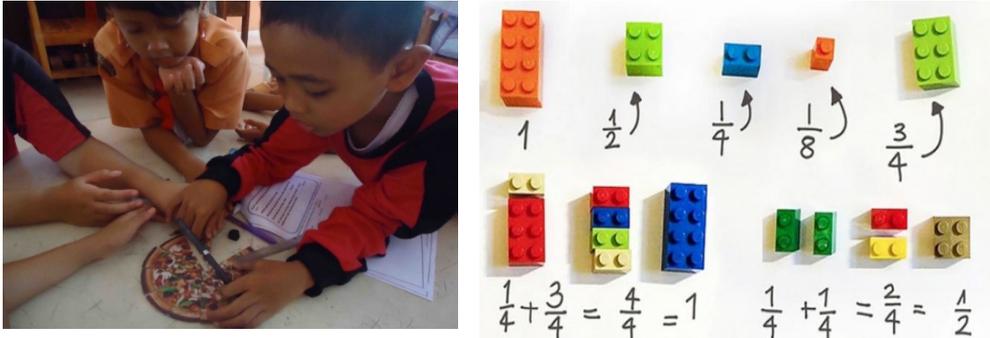


Gambar 3.7. *Aktivitas Menggunakan Media kartu bilangan*

Dengan menggunakan media, siswa mencari FPB dari 2 buah bilangan. Misal, mencari FPB dari 6 dan 18. Siswa mencari faktor bilangan terlebih dahulu, kemudian siswa melingkari faktor dari bilangan 6. Didapatkan faktor dari 6 adalah angka 1, 2, 3, dan 6. Selanjutnya siswa melingkari faktor bilangan dari angka 18. Didapatkan faktor dari 18 adalah angka 1, 2, 3, 6, 9, dan 18. Hasil FPB dapat dilihat ketika ada angka yang dilingkari sebanyak 2 kali. Angka 1, 2, 3, dan 6 dilingkari sebanyak 2 kali. Terlihat bahwa faktor yang paling besar adalah angka 6, itu berarti FPB dari 6 dan 18 adalah 6.

g. Pecahan

Pada bab sebelumnya siswa sudah dikenalkan tentang pecahan melalui aktivitas pembagian roti/ pizza. Pada tahap matematika semi konkret, guru menyediakan media yang menyerupai benda nyata. Misal, gambar pizza, roti, dll yang kemudian dapat dipotong sehingga akan memudahkan siswa untuk menggunakannya. Siswa dapat memotong sendiri media tersebut dan dapat membaginya sesuai jumlah yang diinginkan.



Gambar 3.8. Aktivitas Menggunakan Media Pecahan

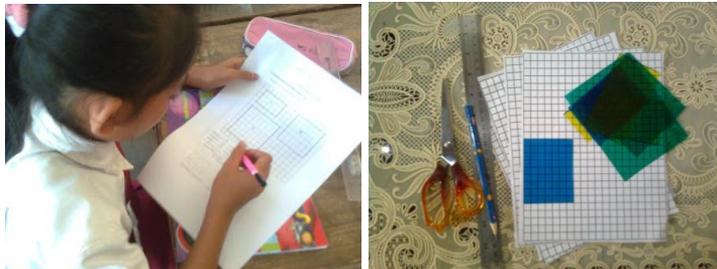
Media lain juga dapat menggunakan mainan lego. Pada gambar terlihat bahwa lego mempunyai titik dan warna yang berbeda. Bentuk dan ukuran juga dapat dipilih dan disesuaikan dengan materi pecahan yang akan diajarkan. Siswa juga dapat menuliskan pecahan berapa saja yang ditunjukkan oleh lego tersebut.

3.2 Geometri dan Pengukuran

3.2.1 Geometri Bidang

a. Persegi

Setelah siswa mengenal bentuk persegi pada tahap matematika konkret, selanjutnya pada tahap matematika semikongkrit siswa dapat menggunakan berbagai media untuk lebih mengenal bangun datar persegi.



Gambar 3.9. *Aktivitas Menggunakan Media kertas dan mika*

Dengan melakukan aktivitas secara langsung, siswa dapat menghitung luas persegi menggunakan media berupa kertas kotak-kotak dan mika transparan. Setelah menggunakan media tersebut, siswa akan mengetahui berapa luas daerah persegi yang akan dihitung.

b. Persegi Panjang

Pada tahap matematika semikonkret, siswa melakukan aktivitas dengan media yang berbentuk persegi panjang. Media yang digunakan dapat berupa kertas kotak-kotak dan mika transparan.



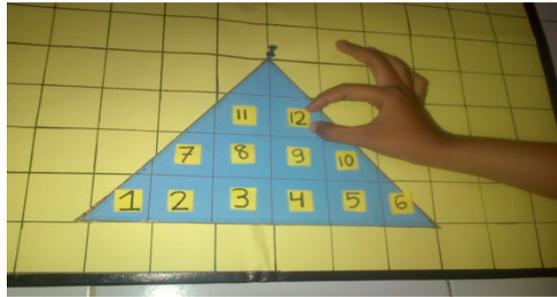
Gambar 3.10. *Aktivitas Menggunakan Media kertas dan mika*

Siswa mengamati dan mengotak-atiknya, sehingga siswa akan memahami pengukuran luas terhadap persegi panjang menggunakan mika transparan. Siswa menuliskan jumlah kotak yang ada di dalam persegi panjang melalui pengamatan terhadap siswa lain yang memperlihatkan luas persegi panjang tersebut. Dari kegiatan tersebut siswa akan mendapatkan konsep pengukuran luas persegi panjang dengan cara mengkalikan jumlah

panjang dengan jumlah lebar akan mendapatkan sebuah luas persegi panjang.

c. Segitiga

Pengenalan bangun datar segitiga dapat dilanjutkan dengan sebuah aktivitas oleh siswa menggunakan media berupa kertas. Kertas berbentuk persegi maupun persegi panjang dapat dilipat tengahnya secara menyilang lalu dipotong menjadi 2 bagian. Sehingga didapatkan 2 bentuk segitiga yang sama besar, hasil dari pembagian persegi maupun persegi panjang. Sebelum dipotong, kertas yang berbentuk segi empat sudah diketahui terlebih dahulu berapa satuan luasnya.



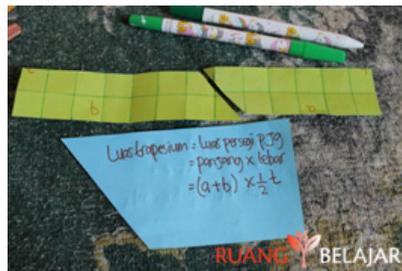
Gambar 3.11. *Aktivitas Menggunakan Media kertas karton*

Pengukuran luas daerah dapat dilakukan menggunakan media kertas karton yang dibentuk dan dibikin kotak-kotak. Setelah segi empat dipotong menjadi 2 bagian, didapatkan sebuah segitiga besar lalu diberikan penomoran agar dapat diketahui jumlah luasnya. Setelah melakukan kegiatan secara langsung, siswa akan memahami bahwa segitiga merupakan setengah dari persegi atau persegi panjang. dengan kata lain, 2 segitiga yang sama besar apabila dijadikan 1, maka akan membentuk sebuah segiempat berbentuk persegi maupun persegi panjang.

d. Trapesium

Pada tahap matematika semi kongkrit, bangun datar trapesium juga dapat dibentuk menggunakan kertas. Sama seperti konsep segitiga, akan tetapi trapesium lebih spesifik dan harus menggunakan persegi panjang sebagai

dasar bentuknya. Kertas yang berbentuk persegi panjang, dapat dibagi menjadi 2 bagian dengan cara memotongnya secara menyamping.



Gambar 3.12. Media kertas

Luas daerah trapesium dapat dihitung setelah persegi panjang tersebut dipotong. Terlihat bahwa sisi atas dan bawah sebuah trapesium apabila dijumlahnya menghasilkan panjang dari sisi persegi panjang, tinggi dari trapesium merupakan lebar dari persegi panjang. Sehingga, siswa akan memahami bahwa luas trapesium sama halnya dengan luas persegi panjang. dengan kata lain, pencarian luas trapesium merupakan panjang sisi bawah ditambah panjang sisi atas kemudian dibagi 2 dan dikalikan dengan tinggi trapesium.

e. Jajar Genjang

Pada tahap matematika semi kongkrit, bentuk jajargenjang dapat diamati menggunakan media yang dibuat sendiri oleh siswa. Media dapat dibuat dari kertas berwarna sehingga akan terlihat lebih menarik. Pengukuran konsep luas jajargenjang, menggunakan dasar yang sama dengan luas pada persegi panjang.

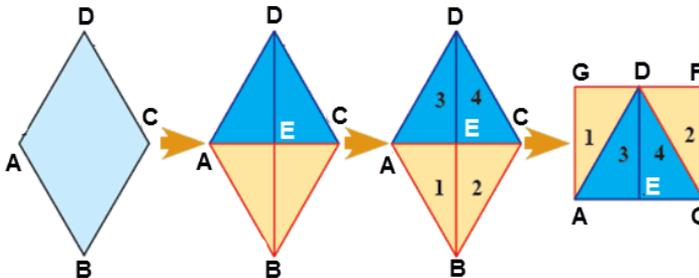


Gambar 3.13. Media kertas berbentuk jajargenjang

Pada gambar, terlihat siswa dapat memotong bagian tengah jajargenjang sehingga membentuk persegi. 2 Potongan samping dapat dijadikan 1 bagian dan diletakkan disamping persegi, sehingga akan membentuk persegi panjang. Panjang dari dari persegi panjang tersebut merupakan alas dari jajargenjang, dan lebar persegi panjang tersebut merupakan tinggi dari jajargenjang. Setelah melakukan aktivitas tersebut, siswa memahami bahwa luas jajargenjang didapatkan dari alas dikalikan dengan tingginya.

f. Belah Ketupat

Bangun datar belah ketupat pada tahap matematika semi kongkrit dapat ditunjukkan menggunakan media kertas berwarna yang digunting membentuk bangun belah ketupat. Siswa dapat mengamati dan memotongnya agar dapat memahami konsep dari bangun belah ketupat.



Gambar 3.14. Media kertas berbentuk belah ketupat

Luas bangun belah ketupat dapat diamati menggunakan konsep luas persegi panjang. 2 Diagonal tengah dari belah ketupat apabila dipotong menjadi 2 sama panjang merupakan panjang dan lebar dari bangun persegi panjang. Pada bangun Siswa melakukan percobaan dengan memotong kertas berbentuk belah ketupat tersebut sehingga siswa memahami bahwa luas belah ketupat didapatkan dari diagonal dikalikan dengan diagonal kemudian dibagi 2 karena diagonal menjadi panjang dan lebar sebuah persegi panjang.

3.2.2 Geometri Ruang

a. Kubus

Pada materi geometri ruang sebuah kubus, tahap matematika semi kongkrit menggunakan media berbentuk kubus. Beberapa kubus berukuran kecil dipersiapkan untuk membelajarkan siswa tentang volume bangun ruang.



Gambar 3.15. *Media kubus*

Kubus yang telah dipersiapkan disusun oleh siswa menjadi kubus yang berbentuk besar. Siswa mengamati jumlah kubus kecil yang dibutuhkan untuk membuat kubus yang berbentuk besar. Siswa menggunakan jumlah kubus kecil sebanyak 27 buah untuk membuat kubus besar. Dengan melakukan aktivitas menggunakan media tersebut, siswa memahami bahwa volume sebuah kubus didapatkan berdasarkan susunan jumlah kubus kecil. Siswa menghitung jumlah kubus pada sisi-sisi kubus besar. Setiap sisi kubus berjumlah 3 kubus kecil, sehingga volume kubus besar diperoleh dari sisi alas dikali sisi alas dikali sisi tinggi.

b. Balok

Pada tahap matematik semi kongkrit, sama halnya dengan kubus. Siswa memahami konsep volume balok menggunakan beberapa kubus kecil yang disusun membentuk sebuah balok besar. Dengan menggunakan media yang dapat diotak-atik siswa, maka siswa dapat memahami dan dapat mengkonstruksi pikirannya sendiri melalui sebuah aktivitas percobaan.

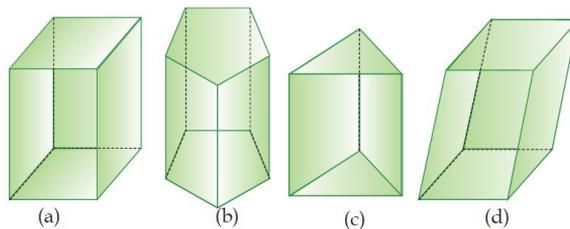


Gambar 3.16. *Media balok*

Kubus yang telah dipersiapkan disusun oleh siswa menjadi balok yang berbentuk besar. Siswa mengamati jumlah kubus kecil yang dibutuhkan untuk membuat balok yang berbentuk besar. Balok mempunyai panjang yang berbeda antar sisinya. Siswa menggunakan jumlah kubus kecil sebanyak 24 buah untuk membuat balok besar. Dengan melakukan aktivitas menggunakan media tersebut, siswa memahami bahwa volume sebuah balok didapatkan berdasarkan susunan jumlah kubus kecil. Siswa menghitung jumlah kubus pada sisi-sisi balok besar. Sisi panjang balok berjumlah 4 kubus kecil, sisi lebar balok berjumlah 3 kubus kecil, dan tinggi balok berjumlah 2 kubus kecil. Sehingga volume balok besar diperoleh dari sisi panjang dikali sisi lebar dikali sisi tinggi. Dapat juga dengan mencari jumlah luas alasnya terlebih dahulu, kemudian dikalikan dengan tingginya. Maka didapatkan bahwa volume balok luas alas dikalikan tingginya.

c. Prisma

Pada bangun ruang prisma, terlebih dahulu siswa sudah menguasai konsep balok. Sama halnya dengan konsep volume balok, volume prisma juga didapatkan dari mencari luas alas terlebih dahulu.

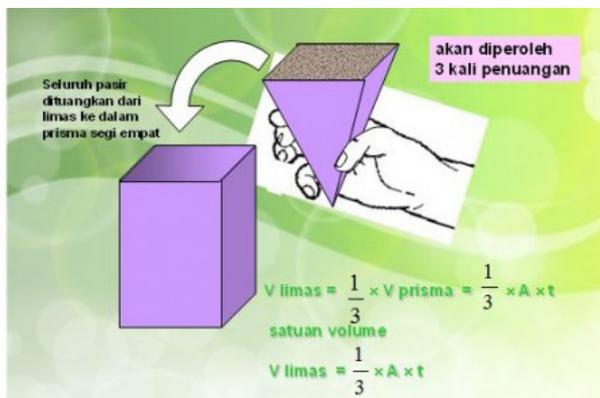


Gambar 3.17. *Media Prisma*

Akan tetapi, bangun ruang prisma mempunyai alas yang berbeda-beda. Prisma segitiga dengan alasnya berbentuk segitiga atau prisma segilima dengan alasnya berbentuk segilima, tergantung dari bentuk alas prisma. Namun pada dasarnya sama, yaitu mencari luas alas terlebih dahulu kemudian dikalikan dengan tingginya, karena volume prisma segiempat sama dengan balok. Siswa melakukan aktivitas menggunakan media sehingga siswa dapat memahami konsep tersebut sesuai pemikiran mereka sendiri.

d. Limas

Pada materi bangun ruang limas, siswa mencoba untuk mencari volume limas menggunakan media balok (prisma segiempat) yang telah dikenal sebelumnya dan limas yang diisi pasir didalamnya.

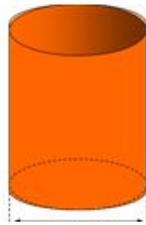


Gambar 3.18. *Media Limas*

Dengan menggunakan limas yang diisi pasir penuh, siswa menuangkan pasir yang ada di dalam limas ke dalam prisma kosong sampai pasir yang ada di dalamnya memenuhi seluruh isi prisma. Siswa menuangkan pasir dari dalam limas sebanyak 3 kali sehingga prisma penuh berisi pasir. Setelah siswa melakukan aktivitas tersebut, siswa memahami bahwa volume limas merupakan sepertiga dari volume prisma.

e. Tabung

Bangun ruang tabung pada dasarnya merupakan prisma dengan alas berbentuk lingkaran. Pada tahap matematika semi kongkrit, siswa sudah memahami volume prisma.



Gambar 3.19. *Media Tabung*

Terlebih dahulu siswa harus mencari seberapa luas alas yang berbentuk lingkaran pada tabung tersebut. Setelah mendapatkan luas alasnya, selanjutnya dikalikan dengan ketinggian dari tabung tersebut. dengan melakukan aktivitas menggunakan media tabung tersebut, siswa memahami konsep dari volume tabung.

f. Kerucut

Pada materi bangun ruang kerucut, siswa sudah mengenal konsep volume tabung. Siswa mencoba untuk mencari volume kerucut menggunakan media tabung dan kerucut yang diisi pasir didalamnya.



Gambar 3.20. *Media Kerucut*

Dengan menggunakan kerucut yang diisi pasir penuh, siswa menuangkan pasir yang ada di dalam kerucut ke dalam tabung kosong sampai pasir yang ada di dalamnya memenuhi seluruh isi tabung. Siswa menuangkan pasir dari dalam kerucut sebanyak 3 kali sehingga tabung penuh berisi pasir. Setelah siswa melakukan aktivitas tersebut, siswa memahami bahwa volume kerucut merupakan sepertiga dari volume tabung.

4

MATEMATIKA IKONIK

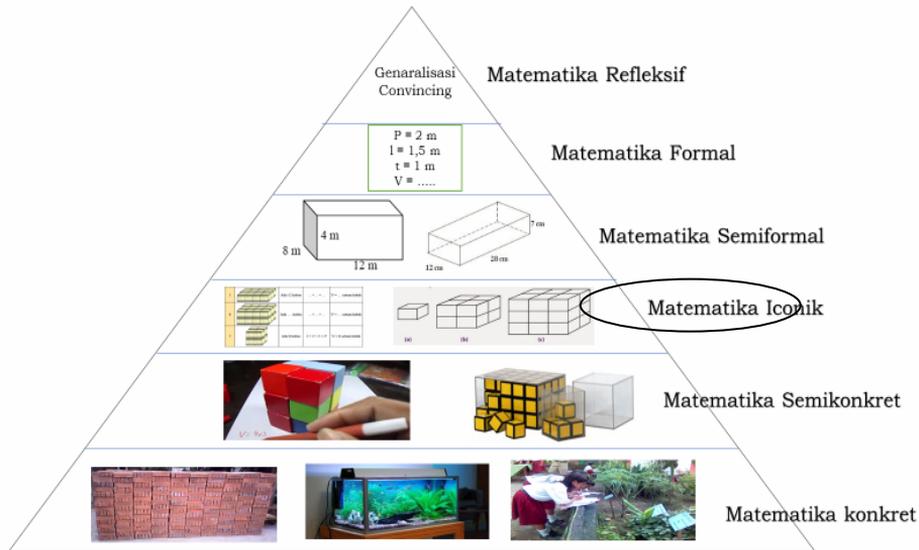
4.1 Pengertian

Sampai saat ini teori pembelajaran Bruner masih berpengaruh dalam dunia pendidikan. Secara teoritis pembelajaran menurut teori Bruner mengikuti langkah: enaktif (*enactive*), ikonik (*iconic*), simbolik (*symbolic*) yakni pembelajaran yang bermula dari hal-hal konkret menuju abstrak. Dalam tahap pembelajaran matematika yang dikemukakan Bruner pada tahap ikonik (*iconic*), pengetahuan sebagian besar dibangun dari gambar-gambar visual untuk membentuk informasi baru, cara penyajian ikonik didasarkan atas pikiran internal, pengetahuan disajikan oleh sekumpulan gambar-gambar yang mewakili suatu konsep, tetapi tidak mendefinisikan sepenuhnya konsep itu. Siswa disajikan gambar untuk memahami konsep yang diajarkan.

4.2 Kedudukan

Dalam *mountain* matematika realistik reflektif matematika ikonik berada pada tahap ke 3, setelah siswa melalui tahap matematika semi konkret dimana pada tahap tersebut siswa memanipulasi media atau alat peraga sebagai model objek yang dipelajari. Pada tahap ini kegiatan anak berkaitan dengan mental melalui kegiatan mengamati gambaran dari objek yang dimanipulasinya. Melalui gambar diharapkan siswa dapat memahami konsep materi dengan baik dengan memvisualisasi permasalahan

matematika. Secara visual kedudukan matematika ikonik dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



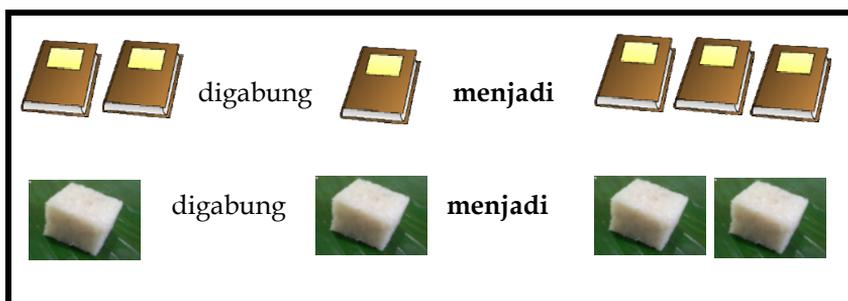
Gambar 4.1 Mountain Matematika Realistik Reflektif tahap Matematika Ikonik

4.3 Pembelajaran

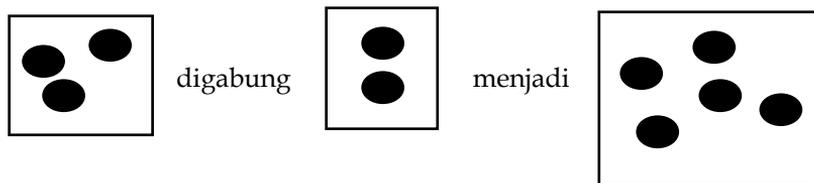
4.3.1 Bilangan

a. Penjumlahan bilangan

Penjumlahan merupakan materi yang tidak sulit untuk diajarkan di Sekolah Dasar. Untuk mencapai pemahaman tentang materi penjumlahan pada tahap matematika ikonik, guru dapat menyajikan gambar terkait materi.



Atau dengan gambar visual yang lain misalnya



Dengan gambar-gambar tersebut siswa dapat melakukan operasi penjumlahan dengan bantuan gambar sehingga siswa mudah untuk memahami konsep penjumlahan sederhana

b. Pengurangan bilangan

Pembelajaran materi pengurangan pada tahap matematika ikonik tidak berbeda dengan pembelajaran materi penjumlahan dimana guru menggunakan gambar /visual untuk memudahkan siswa dalam melakukan operasi pengurangan sebelum siswa sampai pada tahap matematika formal. Contoh pembelajarannya bisa dimulai dari masalah yang sederhana sebagai berikut.



Pertanyaan untuk gambar tersebut adalah berapa jumlah kotak yang berwarna putih? Jumlah seluruh kotak kecil pada gambar tersebut adalah 9 kotak, kemudian 6 kotak diblok dengan warna hitam, jadi sisanya adalah gambar kotak dengan warna putih dengan jumlah 3 kotak.

c. Perkalian bilangan

Perkalian merupakan materi yang cukup sulit untuk dipahami sebagian siswa, pada materi perkalian prinsipnya adalah penjumlahan berulang, jadi sebelum materi perkalian dipelajari, siswa harus menguasai konsep penjumlahan dengan baik sebagai prasyaratnya. Untuk pembelajaran perkalian pada tahap matematika ikonik dapat dilakukan dengan bantuan gambar sebagai berikut.

satu persatu buah jeruk secara adil, sehingga masing masing mendapatkan 4 jeruk. Guru bisa bereksplorasi permasalahan yang lain dengan memvisualisasi berupa gambar supaya anak benar-benar paham konsep pembagian.

e. Operasi hitung campuran

Operasi hitung campuran adalah operasi hitungan yang melibatkan lebih dari satu operasi hitung. Sebenarnya materi ini tidak begitu sulit untuk dipelajari siswa asalkan siswa sudah menguasai konsep penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian. Pada tahap matematika ikonik siswa diajak untuk mengkonstruksi pengetahuannya melalui interpretasi dan pengamatan gambar.

1) Penjumlahan dan pengurangan

Dalam tahap ini ditekankan hasil yang didapat dalam menyelesaikan operasi hitung campuran yang didalamnya memuat penjumlahan dan pengurangan, baik penjumlahan atau pengurangan yang dikerjakan terlebih dahulu.

Permisalan akan menyelesaikan $2 + 3 - 1 = \dots$
 Sebelum siswa sampai pada tahap matematika formal dimana anak menggunakan notasi matematis, siswa diberikan permasalahan terkait menggunakan gambar.

$(2 + 3) - 1 = 4$

$2 + (3 - 1) = 4$

Sehingga dapat disimpulkan bahwa dalam operasi hitung campuran yang memuat penjumlahan dan pengurangan, mana yang dikerjakan terlebih dahulu memberikan hasil yang sama, sehingga kita sepakati bersama dengan siswa bahwa jika dalam operasi hitung campuran memuat penjumlahan dan pengurangan maka operasi yang paling kiri dikerjakan terlebih dahulu.

2) Perkalian dan penjumlahan

Misalnya kita akan membelajarkan operasi hitung campuran yang didalamnya memuat operasi penjumlahan dan perkalian dimana pada operasi ini akan memperoleh hasil yang berbeda, ketika penjumlahan atau perkalian yang dikerjakan terlebih dahulu. Guru bisa menyampaikan materi ini melalui gambar kemudian siswa diberi pertanyaan sebagai berikut



Siswa kemudian diberi beberapa pertanyaan sebagai berikut :

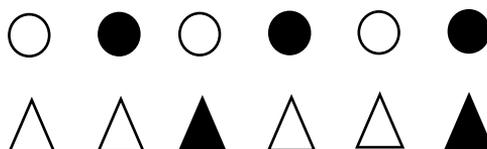
- Berapa banyak bola di atas? (jawaban: $2 + 2 + 1 = 5$)
- Coba ubahlah menjadi bentuk perkalian? (jawaban $(2 + 2) + 1 = 2 \times 2 + 1 = 5$)
- Mana yang dikerjakan lebih dahulu dalam $2 \times 2 + 1$? Siswa menganalisa dan menggunakan intuisinya untuk mencoba-coba!
- Apabila perkalian dikerjakan dahulu maka $(2 \times 2) + 1 = 5$ (jawaban benar)
- Apabila penjumlahan dikerjakan dahulu maka $2 \times (2+1) = 6$ (jawaban kurang benar)

Dari peragaan di atas siswa dapat menyimpulkan bahwa dalam operasi hitung campuran dimana didalamnya memuat perkalian dan penjumlahan, maka operasi perkalian dikerjakan terlebih dahulu dibandingkan penjumlahan.

f. KPK dan FPB

1) KPK

Pembelajaran KPK pada tahap matematika ikonik dapat dilakukan melalui gambar sebagai berikut.

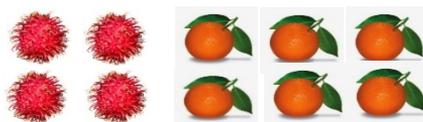


Bola diwarnai setiap kelipatan 2 secara berurutan, demikian juga dengan segitiga diwarnai setiap kelipatan 3. Sehingga bola dan segitiga akan sama-sama diwarnai hitam pada urutan ke 6. Inilah konsep KPK yang harus dipahami siswa.

2) FPB

Pembelajaran FPB pada tahap matematika ikonik dapat dilakukan melalui gambar dengan permasalahan sebagai berikut.

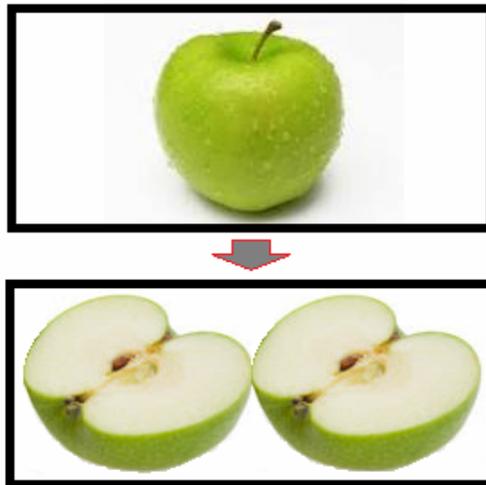
Coba tata buah ini, berapa piring yang dibutuhkan sehingga setiap piring memuat jumlah buah yang sama!



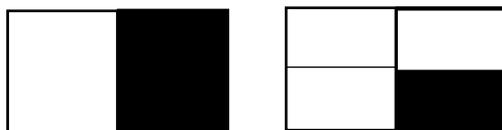
Siswa akan mencoba mengotak atik sesuai dengan intuisinya, sehingga bisa menentukan jumlah piring yang dibutuhkan yaitu 2 piring dengan masing masing piring berisi 2 buah rambutan, dan 3 buah jeruk.

g. Pecahan

Pada tahap matematika ikonik pembelajaran pecahan diilustrasikan dalam gambar, dimana bagian yang diperhatikan adalah bagian yang diarsir. Biasanya pecahan merupakan materi yang sulit untuk diajarkan. Kesulitan tersebut terlihat dari kurang bermaknanya pembelajaran yang dilakukan guru, dan sulitnya membelajarkan pecahan dengan media. Biasanya guru langsung mengenalkan siswa dengan notasi angka, contohnya pada pecahan $\frac{1}{2}$ dimana 1 disebut sebagai pembilang, 2 disebut dengan penyebut. Namun dengan menggunakan gambar, siswa dapat menginterpretasikan makna dari pecahan $\frac{1}{2}$.



Contoh lain terkait dengan konsep nilai pecahan dapat disajikan dengan gambar visual yang lain.



Sehingga siswa dapat menyimpulkan bahwa pecahan merupakan sebagai bagian dari sesuatu yang utuh.

4.3.2 Geometri dan Pengukuran

a. Bangun Datar

1). Pengenalan

a) Persegi

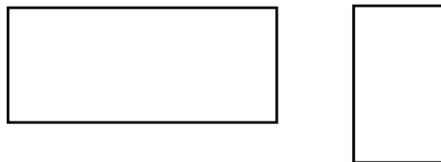
Sebagai langkah selanjutnya setelah pengenalan bangun datar melalui aktivitas dan pengalaman belajar pada tahap sebelumnya, pada tahap matematika ikonik secara khusus mengenalkan bangun persegi melalui gambar. Pengenalan bangun persegi hanya ditekankan pada bentuk bangun.



Setelah siswa belajar mengenal persegi pada tahap matematika konkret dan matematika semi konkret tentu siswa sudah mengenal bentuknya secara nyata. Tetapi pada tahap ini bentuk bangun nyata itu diabstraksi melalui gambar. Sehingga siswa tahu bahwa bangun persegi jika digambarkan akan menyerupai gambar diatas.

b) Persegi Panjang

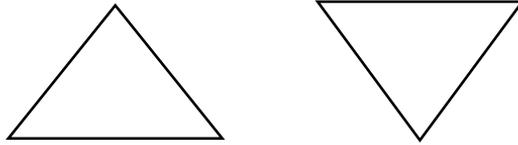
Sama halnya dengan pengenalan persegi, pengenalan bentuk bangun persegi panjang pada tahap matematika ikonik dibelajarkan melalui gambar.



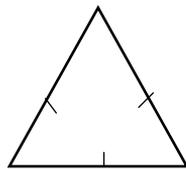
Setelah memperoleh pengalaman pada tahap sebelumnya, siswa diajak untuk mengenal persegi panjang melalui tahap visualisasi, sehingga siswa tahu bahwa bentuk bangun persegi panjang menyerupai gambar di atas.

c) Segitiga

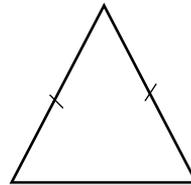
Bangun segitiga pada tahap ini, siswa dikenalkan menggunakan gambar.



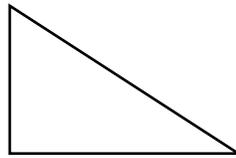
Sehingga siswa tahu bahwa bangun segitiga jika digambarkan menyerupai gambar di atas. Selain itu, siswa juga dikenalkan macam - macam bentuk segitiga yaitu segitiga sama sisi, segitiga sama kaki, segitiga sembarang.



Segitiga sama sisi



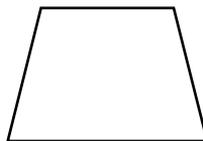
segitiga sama kaki



Segitiga sembarang

d) Trapesium

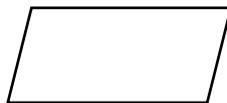
Pengenalan trapesium pada tahap matematika ikonik bangun trapesium pada tahap ini, siswa dikenalkan menggunakan gambar.



Setelah memperoleh pengalaman pada tahap sebelumnya, siswa diajak untuk mengenal trapesium melalui tahap visualisasi, sehingga siswa tahu bahwa bentuk bangun trapesium menyerupai gambar di atas.

e) Jajar Genjang

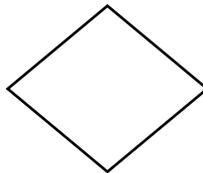
Sama halnya dengan pengenalan trapezium di atas, pengenalan bentuk bangun jajar genjang pada tahap matematika ikonik dibelajarkan melalui gambar.



Setelah memperoleh pengalaman pada tahap sebelumnya, siswa diajak untuk mengenal jajar genjang melalui tahap visualisasi, sehingga siswa tahu bahwa bentuk bangun jajar genjang menyerupai gambar di atas.

f) Belah ketupat

Pengenalan belah ketupat pada tahap matematika ikonik bangun belah ketupat pada tahap ini, siswa dikenalkan menggunakan gambar.



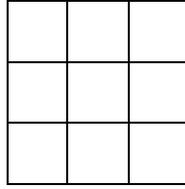
Setelah memperoleh pengalaman pada tahap sebelumnya, siswa diajak untuk mengenal belah keupat melalui tahap visualisasi, sehingga siswa tahu bahwa bentuk bangun belah ketupat menyerupai gambar di atas.

b. Luas Bangun Datar

Pada pembahasan ruang lingkup geometri tahap matematika ikonik secara lebih khusus membahas mengenai luas bangun datar dimana siswa diajak untuk memahami luas bangun datar melalui gambar.

a) Persegi

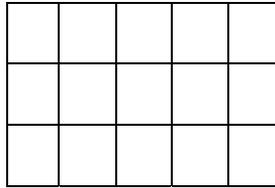
Melalui tahap pembelajaran matematika ikonik, pemahaman konsep luas persegi dilakukan dengan penyajian gambar terkait luas persegi. Sebagai contoh dapat dilakukan sebagai berikut.



Jumlah persegi kecil berjumlah 9 persegi, siswa bisa diminta menghitung tanpa harus menghitung satu - satu. Mungkin dengan cara $3 + 3 + 3 = 9$ atau $3 \times 3 = 9$. Sehingga siswa dapat mengkonstruksi pengetahuannya bahwa luas persegi = sisi \times sisi.

b) Persegi panjang

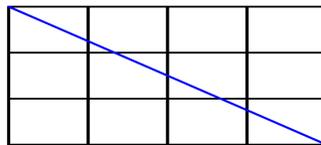
Sama halnya dengan luas persegi di atas, luas persegi panjang pada tahap matematika ikonik dapat disajikan melalui gambar sebagai berikut.



Jumlah persegi kecil berjumlah 15 persegi, siswa bisa diminta menghitung tanpa harus menghitung satu - satu. Mungkin dengan cara $5 + 5 + 5 = 15$ atau $3 \times 5 = 15$. Sehingga siswa dapat mengkonstruksi pengetahuannya bahwa luas persegi panjang = perkalian sisi panjang \times sisi lebar.

c) Segitiga

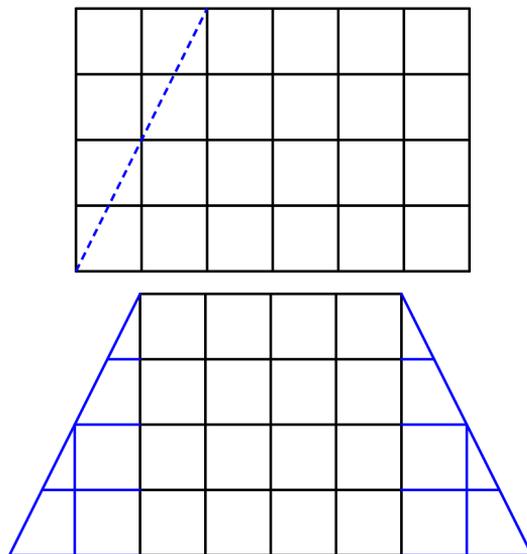
Melalui tahap pembelajaran matematika ikonik, pemahaman konsep luas segitiga dilakukan dengan penyajian gambar terkait luas segitiga. Sebagai contoh dapat dilakukan sebagai berikut.



Pada pembahasan sebelumnya siswa sudah diajak untuk menemukan rumus luas persegi panjang dimana luas persegi panjang = panjang \times lebar. Kalau melihat gambar di atas, bangun persegi panjang jika dipotong menjadi dua sedemikian rupa akan membentuk bangun baru yaitu bangun segitiga sehingga secara logis luas segitiga = $\frac{1}{2} \times$ luas persegi panjang. Atau dengan perkataan lain dalam segitiga, luas segitiga = $\frac{1}{2} \times$ alas \times tinggi.

d) Trapesium

Sama halnya dengan luas segitiga di atas, luas trapesium pada tahap matematika ikonik dapat disajikan melalui gambar sehingga melalui gambar, siswa dapat memahami lebih mendalam terkait luas trapezium. Sebagai contoh sebagai berikut.



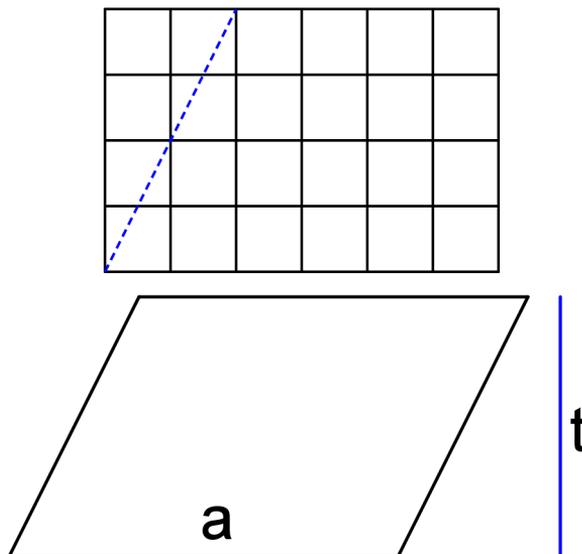
Kalau kita lihat jumlah persegi kecil dalam persegi panjang di atas adalah 24 persegi. Cara menghitungnya yaitu $p \times l = 6 \times 4 = 24$. Setelah persegi panjang dipotong sedemikian rupa maka akan membentuk bangun baru yaitu trapezium. Dimana luasnya sama dengan luas persegi panjang yaitu 24 persegi. Lalu bagaimana mencari luas trapezium?

Pada trapezium terdapat sisi 4 persegi, tetapi tidak terdapat 6 persegi. Sementara sisi atas memiliki 4 persegi, sisi bawah memiliki 8 persegi. Lalu bagaimana memperoleh sisi 6 persegi? Yaitu dengan menjumlahkan sisi atas dan bawah kemudian dibagi dua. Dengan perkataan lain $\{(8 + 4) : 2\}$

Jadi untuk mencari luas trapesium $\{(8+4):2\} \times 4=24$ atau luas trapesium adalah $\{(jumlah\ dua\ sisi\ sejajar) : 2\} \times tinggi$.

e) Jajar genjang

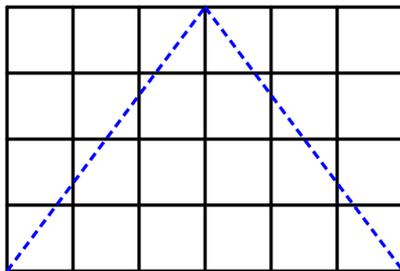
Melalui bangun persegi panjang yang dipotong sedemikian rupa dan potongannya dipindahkan ke sebelah kanan, maka akan membentuk bangun baru yaitu bangun jajar genjang.



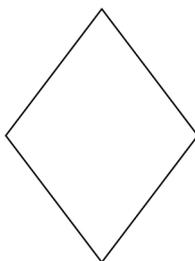
dimana luas jajar genjang = luas persegi panjang. Yaitu $p \times l$ atau $a \times t$.

f) Belah ketupat.

Sama halnya dengan bangun jajar genjang. Luas belah *ketupat* dapat dicari menggunakan luas persegi panjang sebagai berikut.



Persegi panjang di atas dipotong sedemikian rupa, kemudian potongannya di letakkan di bawahnya sehingga membentuk bangun baru.

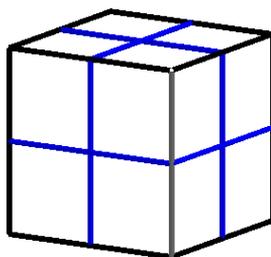


Melalui pengamatan gambar siswa diminta untuk mengkonstruksi pengetahuannya sehingga rumus luas belah ketupa didapat = $\frac{1}{2} \times \text{diagonal} \times \text{diagonal}$.

b. Bangun ruang

1) Volume kubus

Konsep volume kubus melalui gambar dapat dilakukan sebagai berikut.

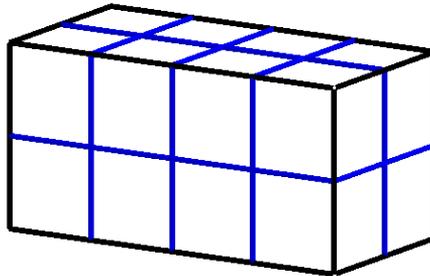


Sisi panjang, lebar dan tinggi kubus sama masing - masing - masing 2 kubus kecil sehingga melalui hubungan jumlah kubus kecil dengan

perkalian sisi panjang, lebar, dan tingginya dapat disimpulkan bahwa volume kubus = $r \times r \times r$. Pada tahap sebelumnya siswa sudah diberikan pengalaman untuk mencari rumus volume kubus sehingga tanpa menghitung satu persatu jumlah kubus kecil maka siswa sudah dapat menghitungnya dengan melihat jumlah rusuknya. Sehingga volume kubus = 8 satuan kubus kecil.

2) Volume balok

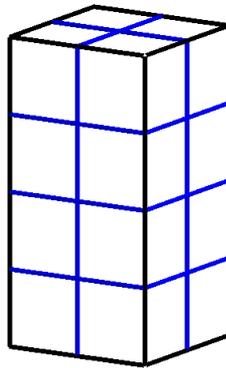
Sama halnya dengan konsep volume kubus, pada tahap ini, siswa bisa diminta untuk mencari volume kubus dengan menghitung kubus kecil sebagai berikut.



Tanpa harus menghitung satu persatu jumlah kubus kecil, siswa bisa menghitung volume balok dengan mengalikan jumlah sisi panjang, lebar, dan tinggi yaitu $4 \times 2 \times 2 = 16$ satuan kubus.

3) Volume Prisma

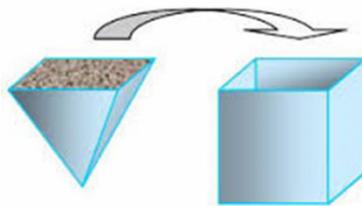
Volume prisma pada tahap matematika ikonik dapat divisualisasikan sebagai berikut.



Tanpa harus menghitung satu persatu, siswa bisa menghitung volume prisma dengan rumus yang sudah dia temukan pada tahap sebelumnya yaitu luas alas \times tinggi maka volume prisma di atas adalah $2 \times 2 \times 4 = 16$ satuan kubus kecil.

4) Volume limas

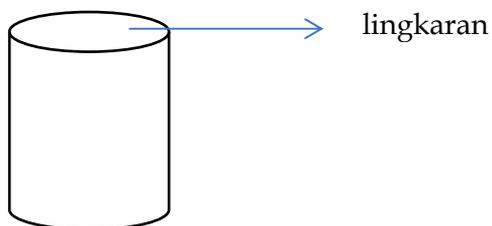
Pembelajaran volume limas pada tahap matematika ikonik dapat dilakukan melalui gambar sebagai berikut.



Guru memberikan petunjuk bahwa limas yang diisi penuh dengan air kemudian dimasukkan ke dalam prisma (syarat : luas alas, tinggi limas dan prisma sama). Dengan memasukkan 3 kali maka prisma akan penuh berisi air. Dari penjelasan tersebut siswa diminta untuk mengkonstruksi pengetahuannya terkait volume limas melalui gambar tersebut. Sehingga rumus volume limas $= \frac{1}{3} \times$ volume prisma $= \frac{1}{3} \times$ luas alas \times tinggi.

5) Volume tabung

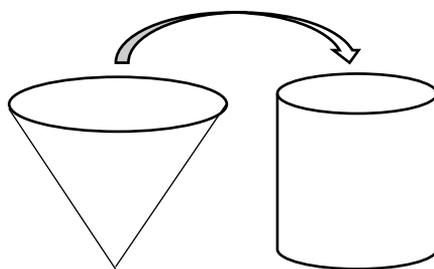
Seringkali topik yang satu dengan yang lain tidak tergambar dengan jelas kaitannya, sehingga seolah - olah materi berdiri sendiri - sendiri. Termasuk pada pembahasan bangun tabung ini. Sebetulnya bangun tabung merupakan prisma tegak segi - n beraturan, dengan n menyatakan tak terhingga. Oleh karena itu, volume tabung = volume prisma tegak segi-n. dimana volume prisma = luas alas \times tinggi.



Volume tabung = $\pi r^2 \times$ tinggi

6) Volume Kerucut

Pembelajaran volume kerucut pada tahap matematika ikonik dapat dilakukan melalui gambar sebagai berikut.



Guru memberikan petunjuk bahwa kerucut yang diisi penuh dengan air kemudian dimasukkan ke dalam tabung (syarat : luas alas, tinggi tabung dan kerucut sama). Dengan memasukkan 3 kali maka tabung akan penuh berisi air. Dari penjelasan tersebut siswa diminta untuk mengkonstruksi pengetahuannya terkait volume kerucut melalui gambar tersebut. Sehingga rumus volume kerucut = $\frac{1}{3} \times$ volume tabung = $\frac{1}{3} \pi r^2 t$

5

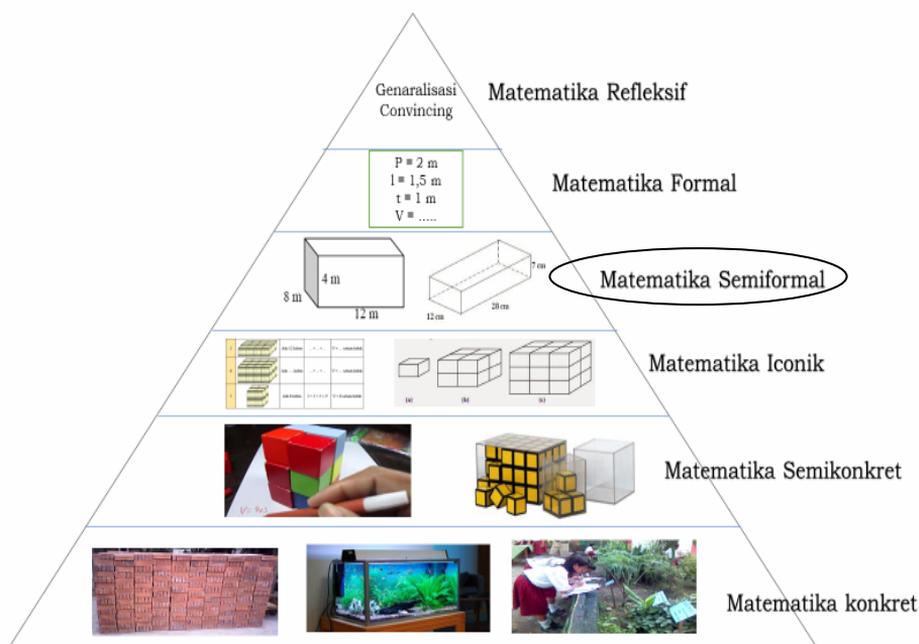
MATEMATIKA SEMIFORMAL

5.1 Pengertian

Matematika semi formal merupakan tahap dimana penggunaan model dan strategi tidak lagi merujuk pada situasi nyata yang dideskripsikan pada kegiatan pembelajaran, tetapi model tersebut harus dapat digunakan secara general pada situasi yang berbeda. Siswa didorong untuk mengembangkan model yang dapat mewakili pemikiran mereka dalam menyelesaikan masalah lain yang berbeda dengan konteks yang diberikan sebelumnya. Atau dengan istilah lain tahap semi formal disebut model formal. Mengutip pendapat Marsigit (2014), model formal berfungsi sebagai jembatan bagi siswa dari pengembangan model yang hanya bisa digunakan untuk menyelesaikan suatu masalah (penambahan dan pengurangan dalam bis) menuju ke pengembangan model yang dapat digunakan untuk menyelesaikan semua masalah yang berkaitan dengan penjumlahan dan pengurangan. Lebih lanjut Marsigit (2014) mengemukakan contoh dari model formal ini adalah penggunaan garis bilangan dan kartu bilangan yang dapat menggambarkan hubungan antar bilangan dan mempresentasikan semua ide/pemikiran siswa untuk menyelesaikan soal/ masalah penjumlahan dan pengurangan. Namun dalam tahap ini, pembelajaran dapat dibelajarkan dengan soal cerita berupa permasalahan sehari – hari sehingga sebelum siswa masuk ke tahap matematika formal, siswa dapat menyelesaikan masalah terkait materi.

5.2 Kedudukan

Dalam *mountain* matematika realistik reflektif sebelum siswa belajar tahap matematika formal, siswa dihadapkan pada situasi yang harus ia lewati untuk menguatkan posisi tahapan belajar berdasarkan pendekatan ini yaitu tahap matematika semi formal. Kedudukan matematika semi formal berada pada tahap ke 4, setelah siswa melalui tahap matematika ikonik dimana pada tahap tersebut siswa dihadapkan pada kegiatan mental melalui kegiatan mengamati gambaran dari objek yang dimanipulasinya. Pada tahap ini kegiatan anak berkaitan dengan model yang dapat dimungkinkan digunakan untuk menyelesaikan semua masalah matematika. Secara visual kedudukan matematika ikonik dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



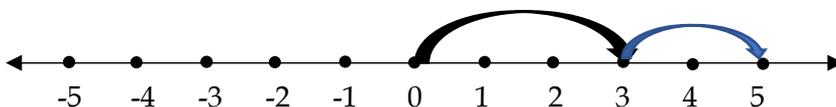
Gambar 5.1. Mountain Matematika Realistik Reflektif tahap Matematika Semiformal

5.3 Pembelajaran

5.3.1 Bilangan

a. Penjumlahan bilangan

Untuk mencapai pemahaman tentang materi penjumlahan pada tahap matematika ikonik, guru dapat menyajikan gambar berupa garis bilangan terkait materi. Misalnya siswa akan menjumlahkan $3 + 2$. Dengan menggunakan aturan jika operasi (+) maka maju, jika (-) maka mundur, jika tanda positif maka arah panah ke kanan, dan jika anda negative maka arah panah ke kiri siswa dapat melakukan operasi sebagai berikut.



1. Bilangan 3 merupakan bilangan positif, maka arah anak panah ke kanan dan langkahkan sampai pada skala 3.
2. Bilangan penjumlahannya 2 merupakan bilangan positif, maka anak panah tetap dihadapkan ke kanan dan karena operasinya penjumlahan maka anak panah dilangkahkan sebanyak 2 langkah.
3. Sehingga ujung anak panah itulah sebagai hasil operasinya, yaitu 5.

Demikian seterusnya, sehingga aturan tersebut dapat berlaku untuk penjumlahan bilangan bulat.

b. Pengurangan bilangan

Sama halnya untuk mencapai pemahaman tentang materi pengurangan, pada tahap matematika ikonik, guru dapat menyajikan gambar berupa garis bilangan terkait materi. Misalnya siswa akan melakukan operasi $5 - 2$. Dengan mengikuti aturan yang sama pada pembelajaran penjumlahan, siswa dapat melakukan langkah sebagai berikut.



1. Bilangan merupakan bilangan positif, maka arah anak panah ke kanan dan langkahkan sampai pada skala 5.
2. Bilangan pengurangnya 2 merupakan bilangan positif, maka anak panah tetap dihadapkan ke kanan dan karena operasinya pengurangan maka dilangkahkan mundur sebanyak 2 langkah.
3. Sehingga pangkal panah itulah sebagai hasil operasinya, yaitu 3.

c. Perkalian bilangan

Setelah melalui tahap sebelumnya, pada tahap matematika semi formal dapat dibelajarkan melalui soal cerita untuk memudahkan siswa dalam memahami konsep perkalian. Bentuk pertanyaan dapat berupa permasalahan yang sederhana namun memiliki penyelesaian yang beragam. Misalnya :

Erik sakit perut dan memutuskan untuk berobat ke puskesmas. Oleh dokter diberikan resep obat dengan tulisan 3×2 . Menurut kamu, berapa jumlah obat yang harus diminum Erik setiap harinya?

Melalui permasalahan tersebut siswa akan mencoba - coba dan menggunakan intuisinya untuk menyelesaikan dengan caranya sendiri. Dia akan mencoba untuk mengkonstruksi dan mengingat kembali apa yang telah ia pelajari pada konsep perkalian pada tahap sebelumnya.

d. Pembagian bilangan

Pembelajaran Pembagian pada tahap matematika semi formal dapat dilakukan dengan menggunakan soal cerita yang berkaitan dengan materi pembagian. Soal ini bisa berbentuk soal cerita yang sederhana. Misalnya :

Hendra memiliki 6 pensil, pensil tersebut akan dia bagikan kepada Anwar dan Budi. Berapa buah buku yang diperoleh masing - masing?

Dari permasalahan di atas siswa bisa menyelesaikan sesuai pengalaman belajar pada tahap sebelumnya. Mungkin dengan gambar, mungkin dengan memperagakan langsung, mungkin juga dengan menggunakan media. Banyak langkah atau cara yang bisa dilakukan siswa.

e. Operasi hitung campuran

Pada tahap sebelumnya, siswa sudah mempelajari pola-pola dengan pengalaman melalui aktivitas, pengamatan, melalui gambar sehingga sebelum siswa masuk pada tahap matematika formal sudah bisa menyimpulkan pola yang mereka konstruksi. Operasi hitung campuran pada tahap semi formal, guru bisa memberi arahan, bimbingan, untuk memfasilitasi siswa bahwa dalam operasi hitung campuran:

1. Memuat tanda kurung, maka operasi didalamnya dikerjakan terlebih dahulu.
2. Penjumlahan dan pengurangan adalah setara, operasi yang paling kiri dikerjakan terlebih dahulu
3. Perkalian dan pembagian adalah setara, operasi yang paling kiri dikerjakan terlebih dahulu.
4. Perkalian dan pembagian lebih kuat daripada penjumlahan dan pengurangan.

Sehingga dengan mengikuti pola ini, maka untuk menyelesaikan permasalahan pada tahap matematika formal akan lebih mudah.

f. KPK dan FPB

1) KPK

Pembelajaran KPK pada tahap matematika semiformal dapat dilakukan dengan memberi siswa permasalahan yang harus diselesaikan terkait KPK sebagai tahapan setelah mempelajari konsep KPK pada tahap sebelumnya. Permasalahan dapat diberikan dengan contoh yang sederhana. Misalnya:

Maria dan Anwar les matematika di rumah Pak Marsigit dengan jadwal yang berbeda. Maria les setiap 2 hari sekali, semenara Anwar les setiap 3 hari sekali. Pada tanggal 1 Mei mereka bertemu untuk les bersama. Pada tanggal berapa mereka les bersama – sama lagi?

Dengan permasalahan sederhana tersebut sangat dimungkinkan siswa dapat menyelesaikan dengan cara yang bermacam-macam sesuai dengan pengetahuan yang telah mereka konstruksi melalui pengalaman belajar pada tahap sebelumnya.

Sehingga siswa memahami nilai pecahan mulai dari sesuatu yang utuh sampai pada pecahan yang nilainya kecil. Siswa juga dapat membandingkan pecahan dengan benar.

5.3.2 Geometri dan Pengukuran

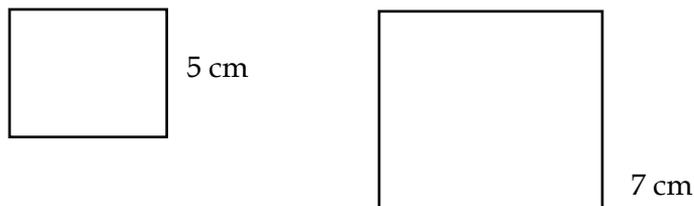
Pada pembahasan ruang lingkup geometri secara lebih khusus membahas mengenai luas bangun datar. Siswa secara lebih komprehensif dapat memahami konsep luas bangun datar.

a. Bangun Datar

1) Luas Persegi

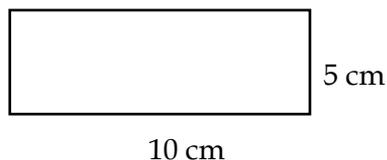
Melalui tahap pembelajaran matematika semiformal, pemahaman konsep luas persegi dilakukan dengan memberikan latihan soal terkait luas persegi. Sebagai contoh dapat dilakukan sebagai berikut.

Berapakah luas persegi berikut!



2) Luas Persegi Panjang

Sama halnya dengan pembelajaran luas persegi, pada tahap ini diberikan latihan soal terkait luas persegi panjang, contohnya sebagai berikut.

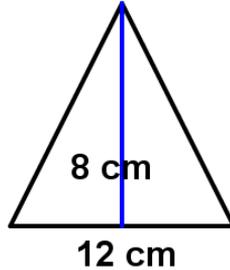


Berapa luas persegi panjang gambar di atas?

3) Luas Segitiga

Pembelajaran luas segitiga pada tahap matematika semi formal siswa diberikan permasalahan berupa soal terkait luas segitiga. Contoh soal

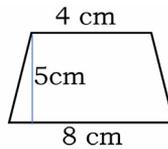
dapat dimodifikasi sedemikian rupa oleh guru sehingga siswa dapat menyelesaikan setelah melalui tahap sebelum – sebelumnya. Sebagai contoh, soal permasalahannya adalah sebagai berikut.



Berapa luas segitiga di atas?

4) Luas Trapesium

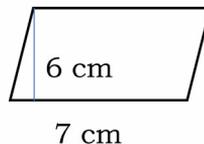
Pada tahap sebelumnya rumus luas trapesium sudah diketahui melalui aktivitas penemuan rumus yaitu Luas Trapesium = $(\frac{1}{2} \times \text{jumlah sisi sejajar}) \times \text{tinggi}$. Pada tahap matematika semi formal kegiatan dapat dilakukan dengan memberi soal sebagai contoh sebagai berikut.



Berapa luas trapesium di atas?

5) Luas Jajar genjang

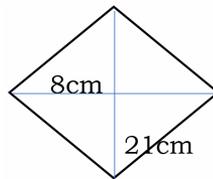
Pada tahap sebelumnya rumus luas jajar genjang sudah diketahui melalui aktivitas penemuan rumus yaitu luas jajar genjang = alas x tinggi. Pada tahap matematika semi formal kegiatan dapat dilakukan dengan memberi soal sebagai contoh sebagai berikut.



Berapa luas jajar genjang di atas?

6) Luas Belah Ketupat

Pembelajaran luas belah ketupat pada tahap matematika semi formal siswa diberikan permasalahan berupa soal terkait luas belah ketupat. Contoh soal dapat dimodifikasi sedemikian rupa oleh guru sehingga siswa dapat menyelesaikan setelah melalui tahap sebelum - sebelumnya. Sebagai contoh, soal permasalahannya adalah sebagai berikut.

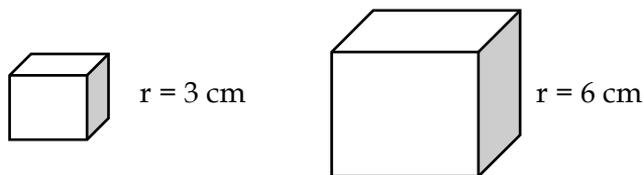


Berapakah luas belah ketupat di atas?

b. Bangun ruang

1) Volume kubus

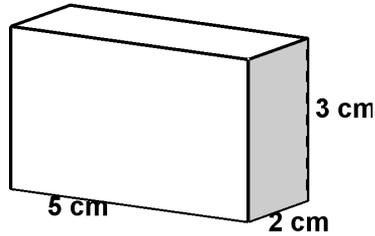
Melalui tahap pembelajaran matematika semi formal, pemahaman konsep dilakukan dengan pemberian latihan soal terkait volume kubus, setelah melalui penemuan rumus pada matematika konkret dan matematika semi konkret.



Hitunglah volume kubus gambar di atas!

2) Volume Balok

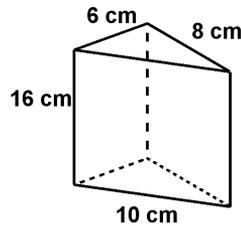
Sama halnya dengan pembelajaran volum kubus, pada tahap ini diberikan latihan soal terkait volume balok, contohnya sebagai berikut.



Berapa volume balok?

3) Volume Prisma

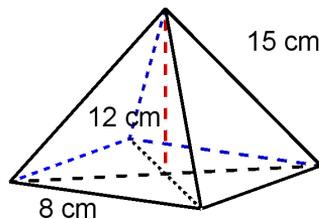
Pembelajaran volume prisma pada tahap matematika semi formal siswa diberikan permasalahan berupa soal terkait volume prisma. Contoh soal dapat dimodifikasi sedemikian rupa oleh guru sehingga siswa dapat menyelesaikan setelah melalui tahap sebelum – sebelumnya. Sebagai contoh, soal permasalahannya adalah sebagai berikut.



Berapa volume prisma segitiga di atas?

4) Volume Limas

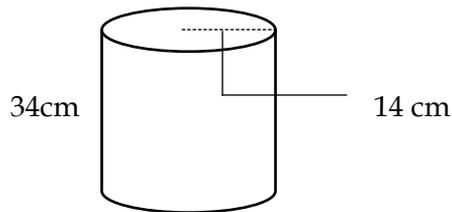
Pada tahap sebelumnya rumus volume limas sudah diketahui melalui aktivitas penemuan rumus yaitu Volume limas = $\frac{1}{3}$ Luas alas x tinggi. Pada tahap matematika semi formal kegiatan dapat dilakukan dengan memberi soal sebagai contoh sebagai berikut.



Hitung volume limas bangun di atas!

5) Volume tabung

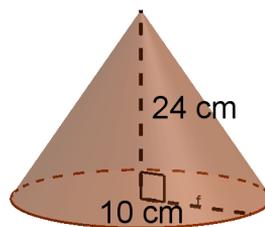
Pada tahap sebelumnya rumus volume tabung sudah diketahui melalui aktivitas penemuan rumus yaitu Volume tabung = Luas alas \times tinggi. Pada tahap matematika semi formal kegiatan dapat dilakukan dengan memberi soal sebagai contoh sebagai berikut.



Berapa volume tabung?

6) Volume Kerucut

Pembelajaran volume kerucut pada tahap matematika semi formal siswa diberikan permasalahan berupa soal terkait volume prisma. Contoh soal dapat dimodifikasi sedemikian rupa oleh guru sehingga siswa dapat menyelesaikan setelah melalui tahap sebelum - sebelumnya. Sebagai contoh, soal permasalahannya adalah sebagai berikut.



Hitunglah volume kerucut di atas!

-oo0oo-

6

MATEMATIKA FORMAL

6.1 Pengertian

Matematika sangat berperan dalam berbagai bidang kehidupan manusia. Haylock & Thangata (2007: 3) berpendapat bahwa “mathematics is important in everyday life, many forms of employment, science and technology, medicine, the economy, the environment and development, and in public decision-making”. Artinya, matematika itu penting dalam kehidupan sehari-hari, dalam bidang pekerjaan, sains dan teknologi, medis, ekonomi, lingkungan dan pemerintahan, serta penentuan kebijakan yang bersifat umum, dengan demikian matematika merupakan bagian dari kehidupan manusia.

Adapun alasan untuk mempelajari matematika karena matematika berfungsi secara matematis dimana sebagai pemecah masalah; memahami bagaimana konsep-konsep abstrak saling berhubungan dan pengembangan keterampilan-keterampilan sistematisasi, generalisasi, konjekturisasi, dan pembuktian. Alasan lainnya adalah karena matematika sebagai matematika fungsional dimana matematika digunakan dan diterapkan disemua konteks social ekonomi.

Matematisasi adalah proses kunci dalam pendidikan matematika. Freudenthal (dalam Gravemeijer,1994), berpendapat bahwa matematisasi bukan sekedar suatu kesatuan proses utuh untuk mencari maupun

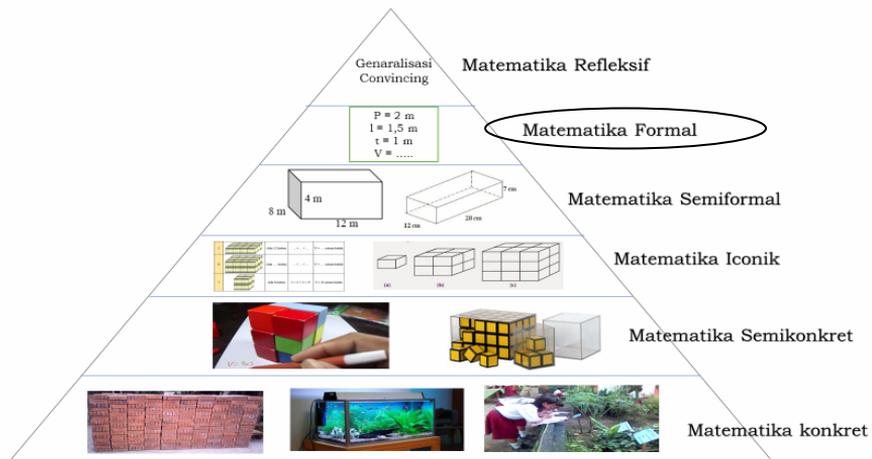
membangun matematika yang relevan dari suatu fenomena atau konteks, tetapi pembelajaran matematika sebagai suatu proses peningkatan dan pengembangan ide matematika secara bertahap. Adapun komponen-komponen matematisasi antara lain: pertama, matematika tidak hanya sebagai aktivitas matematikawan, tetapi juga dapat membiasakan siswa dengan pendekatan matematika dalam peraturan sehari-hari. Kedua, matematisasi menghubungkan ide penemuan kembali sebagai suatu proses dimana siswa memformalkan pemahaman informal dan intuisi mereka. Proses penemuan kembali melibatkan aspek matematisasi horizontal dan matematisasi vertikal. Hal ini sejalan dengan pendapat De Lange, matematisasi dibagi atas: matematisasi horizontal dan vertical. Matematisasi horizontal menyangkut proses generalisasi (*generalizing*) yang diawali dengan pengidentifikasian konsep matematika berdasarkan keteraturan (*regularitas*) dan hubungan (*relations*) yang ditemukan melalui visualisasi dan skematisasi masalah, sedangkan matematisasi vertikal merupakan proses formalisasi (*formalizing*) dimana model matematika yang diperoleh pada matematisasi horizontal menjadi landasan pengembangan konsep matematika yang lebih formal.

Beberapa kegiatan-kegiatan yang dapat dicapai melalui proses matematisasi horizontal antara lain: Identifikasi matematika dalam suatu konteks umum, skematisasi, formulasi dan fisualisasi masalah dalam berbagai cara, pencarian keteraturan hubungan, dan transfer masalah nyata ke dalam model matematika. Kegiatan yang dapat pula dicapai melalui proses matematisasi vertikal antara lain: representasi suatu relasi ke dalam suatu rumus atau aturan, pembuktian keteraturan, penyesuaian dan pengembangan model matematika, penggunaan model matematika yang bervariasi, pengkombinasian dan pengintegrasian model matematika, perumusan suatu konsep matematika baru, dan generalisasi. Keberadaan proses matematisasi horizontal dan matematisasi vertical tidak terpisah oleh masing-masing tahap namun proses tersebut terjadi secara bergantian yang terbentuk seperti anak tangga. Pada matematika formal tentunya siswa telah melewati proses matematisasi horizontal.

6.2 Kedudukan

Aktivitas pembelajaran matematika sebaiknya berdasarkan pada tahap perkembangan siswa. Dalam *mountain* matematika realistik reflektif kedudukan matematika formal yang diperoleh siswa tentunya telah melewati tahap matematika konkret, matematika semi konkret, matematika ikonik, matematika semiformal. Marsigit, dkk (2015;41) menyatakan bahwa pada matematika formal siswa sudah dapat menuliskan dan menyelesaikan masalah matematika dengan notasi formal.

Secara visual kedudukan matematika formal dapat dilihat pada gambar di bawah ini.



Gambar 6.1 Mountain Matematika Realistik Reflektif tahap Matematika Formal

Di sinilah siswa menggunakan pemikirannya tanpa bergantung lagi pada model matematika yang digunakan sebelumnya (model formal).

6.3 Pembelajaran

Pembelajaran yang dilakukan untuk tahap matematika formal adalah siswa langsung menuliskan atau menyelesaikan masalah dalam bentuk angka-angka atau lambang-lambang atau notasi formal.

6.3.1 Bilangan

Pembelajaran bilangan secara khusus akan membahas tentang pembelajaran operasi hitung suatu bilangan. Adapun operasi hitung yang dapat dilakukan antara lain:

a. Penjumlahan bilangan

Penjumlahan dua bilangan atau lebih dapat dilakukan dengan menambahkan atau menjumlahkan bilangan-bilangan tersebut.

Contoh:

Ibu Dian pergi ke pasar membeli beberapa bahan makanan. Di sana Ia membeli 500 gram gula pasir dan bahan-bahan lainnya, kemudian Ibu Dian menuju ke Indomaret dan kembali membeli 250 gram gula pasir. Berapa banyak gula pasir yang dibeli ibu Dian?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Gula pasir yang dibeli oleh ibu Dian adalah 500 gram dan 250 gram

Ditanya:

Berapa banyak gula pasir yang dibeli oleh ibu Dian?

Dijawab:

$$500 \text{ gram} + 250 \text{ gram} = 275 \text{ gram}$$

atau

$$500 + 250 = 275.$$

Jadi banyaknya gula pasir yang dibeli ibu Dian adalah 275 gram

b. Pengurangan

Pengurangan dua bilangan atau lebih dapat dilakukan dengan mengurangi atau memperoleh selisih dari bilangan tersebut.

Contoh:

Fani memiliki 36 butir permen. Fani dan kelima temannya yang lain akan makan permen tersebut bersama-sama. Fani membagikan permen kepada temannya 10 butir. Berapakah sisa permen yang dimiliki Fani?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Fani memiliki 36 butir permen kemudian permen tersebut diberikan kepada temannya sebanyak 10 butir

Ditanya:

Berapa sisa permen yang dimiliki Fani?

Dijawab:

$36 \text{ butir permen} - 10 \text{ butir permen} = 26 \text{ butir permen}$

atau

$$36 - 10 = 26$$

Jadi sisa permen yang dimiliki Fani adalah sebanyak 26 butir permen

c. Perkalian

Perkalian dua bilangan dapat dilakukan dengan mengalikan kedua bilangan tersebut atau melakukan penjumlahan secara berulang dengan penjumlahannya tetap yang dapat juga dirumuskan:

$$a \times b = \underbrace{b \times b \times b \times \dots \times b}_{\text{sebanyak } a \text{ kali}}$$

Contoh:

Nona memiliki 6 tas sekolah yang biasa dipakainya setiap hari. Setiap tas terdapat 12 pensil warna. Berapakah pensil seluruhnya yang dimiliki Nona?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Nona memiliki 6 tas sekolah, setiap tas ada 12 pensil warna

Ditanya:

Berapa pensil milik Nona?

Dijawab:

Setiap 1 tas sekolah ada 12 pensil warna sehingga untuk 6 tas sekolah ada

$$6 \times 12 = 72 \text{ atau } 6 \times 12 = 12 + 12 + 12 + 12 + 12 + 12 = 72$$

Jadi pensil warna yang dimiliki Nona sebanyak 72 pensil

d. Pembagian

Pembagian dua bilangan dapat dilakukan dengan membagi kedua bilangan tersebut atau melakukan pengurangan secara berulang dengan pengurangannya tetap

Contoh:

1. $16 : 4 = 4$ atau

$16:4 = \left\{ \begin{array}{l} 16 - 4 = 12 \\ 12 - 4 = 8 \\ 8 - 4 = 4 \\ 4 - 4 = 0 \end{array} \right\} 4 \text{ x pengurangan sampai habis}$

Pada pengurangan berulang ini terjadi pengurangan sampai pada mendapatkan nilai nol

2. Fino memiliki 60 kantong kelereng. Kantong-kantong kelereng tersebut dibagikan sama banyak kepada 12 temannya. Berapakah kantong yang diterima oleh masing-masing temannya Fino?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Fino memiliki 60 kantong kelereng, kantong tersebut akan diberikan kepada 12 temanya

Ditanya:

Berapa kantong kelereng yang dimiliki masing-masing temannya Fino?

Dijawab:

60 kantong :12=5 kantong

Atau

$$60 : 12 = 5$$

e. Operasi hitung campuran

Operasi hitung campuran adalah operasi hitung yang melibatkan lebih dari satu operasi hitung atau operasi hitung yang melibatkan penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian. Disini siswa dituntut untuk menguasai secara baik masing-masing operasi hitung sehingga siswa tidak mengalami kendala dalam menyelesaikan soal operasi hitung campuran.

1) Penjumlahan dan pengurangan

Penyelesaian operasi hitung penjumlahan dan pengurangan dapat dilakukan dengan syarat: operasi hitung penjumlahan dan pengurangan berkedudukan sama/sederajat, maka urutan pengerjaannya dari yang kiri lebih dahulu atau yang depan lebih dahulu (berlaku jika tidak ada tanda kurung)

Contoh:

1. Hasil dari $6.435 + 1.572 - 4.839$ adalah

Pada soal tersebut yang dikerjakan lebih dahulu yaitu penjumlahannya karena berada di depan dan operasi hitung pengurangannya di belakang, serta tidak adanya tanda kurung di antara kedua operasi hitung tersebut.

$$\begin{aligned} 6.435 + 1.572 - 4.839 &= 8.007 - 4.839 \\ &= 3.168 \end{aligned}$$

2. Hasil dari $12.327 - 7.269 + 5.008$ adalah....

Pada soal tersebut yang dikerjakan lebih dahulu yaitu pengurangannya karena berada di depan dan operasi hitung penjumlahannya di belakang, serta tidak adanya tanda kurung di antara kedua operasi hitung tersebut.

$$\begin{aligned} 12.327 - 7.269 + 5.008 &= 5.058 + 5.008 \\ &= 10.066 \end{aligned}$$

- 2) Campuran antara penjumlahan, pengurangan, perkalian, dan pembagian

Dalam menyelesaikan operasi hitung campuran perlu memperhatikan beberapa hal seperti:

- a. Tanda operasi hitung
- b. Tanda kurung

Apabila dalam suatu operasi hitung campuran terdapat tanda kurung, pengerjaan yang berada dalam tanda kurung harus dikerjakan terlebih dahulu. Apabila dalam suatu operasi hitung tidak terdapat tanda kurung pengerjaannya berdasarkan sifat-sifat operasi hitung sebagai berikut:

1. Operasi penjumlahan (+) dan pengurangan (-) sama kuat artinya yang terletak disebelah kiri dikerjakan terlebih dahulu.
2. Operasi perkalian (x) dan pembagian (:) sama kuat artinya operasi yang terletak di sebelah kiri dikerjakan terlebih dahulu.
3. Operasi perkalian (x) dan pembagian (:) lebih kuat dari pada operasi penjumlahan (+) dan pengurangan (-) artinya operasi perkalian (x) dan pembagian (:) dikerjakan terlebih dahulu dari pada operasi penjumlahan (+) dan pengurangan (-).

Contoh:

- a. Hasil dari $3.415 + 12.205 - (10.371 + 209)$ adalah...
Pengerjaan yang didahulukan adalah yang berada di dalam tanda kurung kemudian kerjakan sesuai urutan operasi hitung yang berlaku.

$$\begin{aligned} 3.415 + 12.205 - (10.371 + 209) &= 3.415 + 12.205 - 10.580 \\ &= 15.620 - 10.580 \\ &= 5.040 \end{aligned}$$

- b. Hasil dari $(400:20) \times 100 - 5$ adalah ...
Pengerjaan yang didahulukan adalah yang berada di dalam tanda kurung kemudian kerjakan sesuai urutan operasi hitung yang berlaku.

$$(400:20) \times 100 - 5 = (20 \times 100) - 5$$

$$= 2.000 - 5$$

$$= 1.995$$

- c. Hasil dari $240 + 60 \times 50 : 15$ adalah ...

Pengerjaan yang didahulukan adalah perkalian dilanjutkan dengan pembagian dan kemudian kerjakan sesuai urutan operasi hitung yang berlaku.

$$240 + 60 \times 50 : 15 = 240 + (60 \times 50) : 15$$

$$= 240 + (3.000 : 15)$$

$$= 240 + 200$$

$$= 440$$

- d. Hasil dari $240 + 200 \times 50 - 100 : 20$ adalah....

Pengerjaan yang didahulukan adalah perkalian dilanjutkan dengan pembagian dan kemudian kerjakan sesuai urutan operasi hitung yang berlaku.

$$240 + 200 \times 50 - 100 : 20 = 240 + (200 \times 50) - (100 : 20)$$

$$= 240 + 10.000 - 5$$

$$= 10.235$$

f. Menentukan Faktor Persekutuan Terbesar (FPB) dan Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

1). Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK)

Untuk menentukan KPK dapat dilakukan melalui:

- Nilai terkecil dari kelipatan persekutuan dua atau lebih bilangan
- Faktorisasi prima (Pohon factor); dengan mengalikan semua bilangan factor dan apabila ada yang sama maka yang diambil adalah yang terbesar serta apabila faktorisasi prima keduanya sama maka ambil salah satunya.

Contoh:

- KPK dari 6 dan 8 adalah

Kelipatan dari 6: {16, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...}

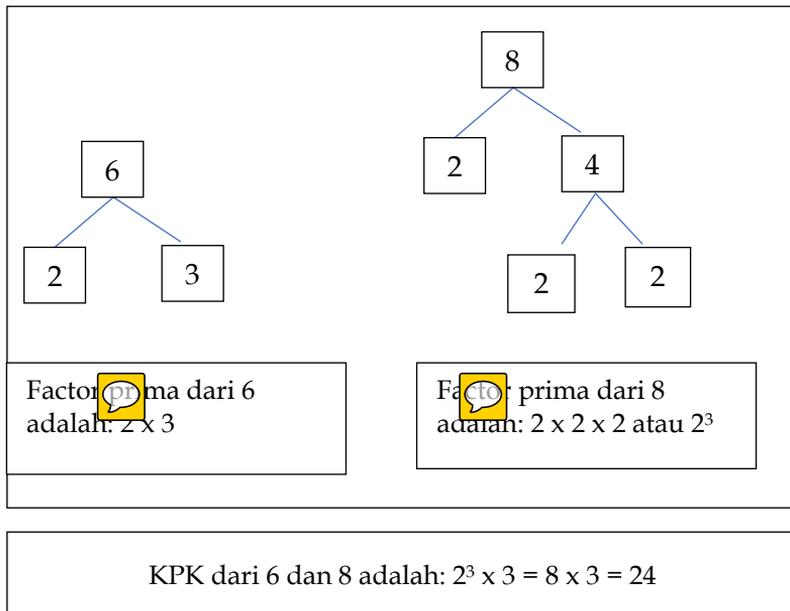
Kelipatan dari 8 adalah: {8, 16, 24, 32, 40, 48, 000}

Kelipatan Persekutuan dari 6 dan 8 adalah: {24, 48, ...}

KPK dari 6 dan 8 adalah: 24

Atau

KPK dari 6 dan 8 adalah:



2. Mira dan Novi mengikuti les vokal ditempat yang sama, Mira berlatih setiap 6 hari sekali sedangkan novii berlatih setiap 8 hari sekali. Jika hari ini Mira dan Novi les vokal bersama, berapa hari lagi mereka les bersama kembali ?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Mira mengikuti latihan setiap 6 hari sekali

Novi mengikuti latihan setiap 8 hari sekali

Ditanya:

Kapan Mira dan Novi latihan bersama lagi?

Dijawab:

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2 \times 4 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

KPK dari 6 dan 8 adalah $2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$

Jadi Mira dan Novi akan mengikuti les vocal bersama lagi pada 24 hari kemudian

3. Vivin pergi ke pasar setiap 8 hari sekali, sedangkan Erna pergi ke pasar setiap 6 hari sekali. Pada tanggal 4 Mei 2017 mereka berbelanja bersama, pada tanggal berapa mereka berbelanja bersama kembali ?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Vivin ke pasar setiap 8 hari dan Erna setiap 6 hari. Mereka belanja bersama pada tanggal 4 Mei 2017

Ditanya:

Pada tanggal berapa mereka berbelanja bersama kembali ?

Dijawab:

$$6 = 2 \times 3$$

$$8 = 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

$$\text{Jadi KPK dari 8 dan 6} = 2^3 \times 3 = 8 \times 3 = 24$$

Jadi mereka Vina dan Erna akan berbelanja bersama kembali 24 hari kemudian yakni pada tanggal 28 Mei 2017

2) Faktor Persekutuan Terbesar (FPB)

Untuk menentukan FPB dapat dilakukan melalui

- Nilai paling besar dari factor persekutuan dua bilangan atau lebih
- Faktorisasi prima (Pohon Faktor); Jika pada faktorisasi prima memiliki bilangan berpangkat dari dua bilangan atau lebih maka pangkat yang digunakan adalah pangkat yang terkecil

Contoh:

1. FPB dari 6, 8, dan 12 adalah...

Factor dari 6 adalah = {1, 2, 3, 6}

Factor dari 8 adalah = {1, 2, 4, 8}

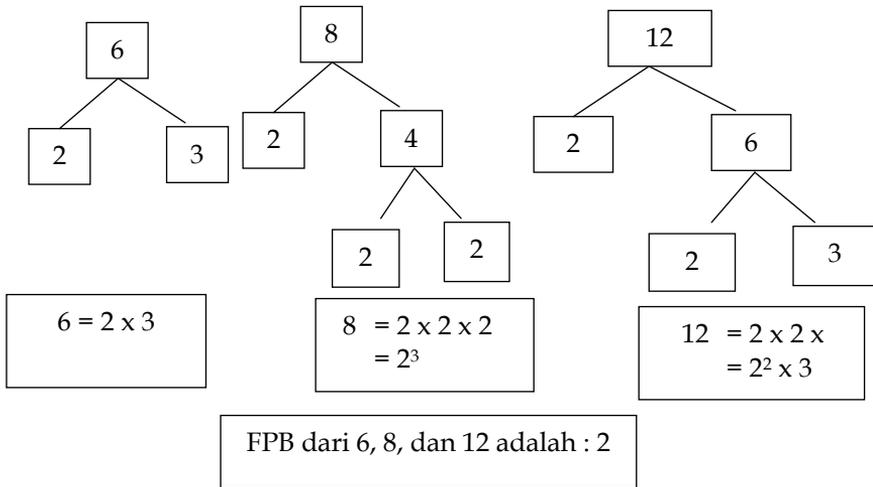
Factor dari 12 adalah = {1, 2, 3, 4, 6, 12}

Faktor Persekutuan dari 6,8,12 adalah: 1 , 2,

Nilai yang terbesar adalah: 2

Jadi FPB dari 6, 8, 12 adalah: 2

Atau



- Sebanyak 48 dokter dan 60 bidan akan dikirim ke daerah pedalaman. Setiap daerah pedalaman akan menerima dokter dan bidan dengan jumlah sama banyak. Berapa banyak daerah pedalaman yang akan menerima dokter serta bidan?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Sebanyak 48 dokter dan 60 bidan akan dikirim ke daerah pedalaman. Setiap daerah pedalaman akan menerima dokter dan bidan dengan jumlah sama banyak.

Ditanya:

Berapa banyak daerah pedalaman yang akan menerima dokter dan bidan?

Dijawab:

Faktorisasi prima dari 48 adalah $2^4 \times 3$

Faktorisasi prima dari 60 adalah $2^2 \times 3 \times 5$

FPB dari 48 dan 60 adalah: $2^2 \times 3 = 12$

Jadi ada 12 daerah pedalaman yang akan menerima dokter dan bidan.

g. Operasi hitung pada bilangan pecahan

1) Penjumlahan dan atau pengurangan

Untuk penjumlahan dan atau pengurangan pecahan yang penyebutnya memiliki nilai yang sama

Rumus:

$$\frac{a}{n} \pm \frac{b}{n} = \frac{a \pm b}{n}$$

Contoh:

$$1. \quad \frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$$

$$2. \quad \frac{5}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5-2}{6} = \frac{3}{6}$$

Untuk penjumlahan dan atau pengurangan pecahan yang penyebutnya tidak memiliki nilai yang sama.

Rumus:

$$\frac{a}{n} \pm \frac{b}{m} = \frac{a \times m \pm b \times n}{mn}$$

Contoh:

$$1. \quad \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{2 \times 5 + 1 \times 3}{3 \times 5}$$

$$= \frac{10 + 3}{15}$$

$$= \frac{13}{15}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{6} &= \frac{2 \times 3 + 1 \times 5}{5 \times 6} \\
 &= \frac{12 + 5}{30} \\
 &= \frac{17}{30}
 \end{aligned}$$

1. Bu Budi membeli tepung terigu sebanyak $4\frac{2}{5}$ kg. Tepung terigu tersebut dipakai untuk membuat roti sebanyak 3,5 kg. Bu Budii membeli lagi tepung terigu $\frac{3}{4}$ kg untuk persediaan. Berapa banyak persediaan tepung terigu Bu sekarang? Pertanyaan tersebut dapat diselesaikan dengan melakukan penyerderhanaan bentuk pecahan seperti berikut:

$$4\frac{2}{5} \text{ kg} = \frac{22}{5} \text{ kg tepung}$$

$$3,5 \text{ kg} = \frac{35}{10} \text{ kg tepung yang dipakai buat roti}$$

$$\frac{3}{4} \text{ kg tepung yang dibeli lagi}$$

Dari soal di atas dapat dibuat operasi hitung berikut:

$$\begin{aligned}
 \frac{22}{5} - \frac{35}{10} + \frac{3}{4} &= \left(\frac{22}{5} - \frac{35}{10} \right) + \frac{3}{4} \\
 &= \frac{44}{10} - \frac{35}{10} + \frac{3}{4} \\
 &= \frac{9}{10} + \frac{3}{4} \\
 &= \frac{36}{40} + \frac{30}{40} \\
 &= \frac{66}{40} = 1\frac{13}{20}
 \end{aligned}$$

2. Warung Pak Hendra memiliki persediaan minyak tanah 2,2 drum. Dalam waktu 2 hari, minyak tanah tersebut laku berturut-turut $2\frac{3}{4}$ drum dan $\frac{1}{3}$ drum. Berapakah sisa minyak tanah milik Pak Hendra?

Pertanyaan tersebut dapat diselesaikan dengan melakukan penyederhanaan bentuk pecahan seperti berikut:

Dari soal di atas dapat dibuat operasi hitung berikut:

$$\begin{aligned} 2\frac{2}{4} - 2,2 - \frac{1}{3} &= \frac{11}{4} - \frac{22}{10} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{22}{40} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{26}{120} \end{aligned}$$

Jadi sisa minyak tanah Pak Hendra adalah $\frac{22}{120}$ gram

2) Perkalian

Operasi hitung perkalian pecahan dapat dilakukan dengan mengalikan pembilangan dengan pembilang dan penyebut dengan penyebut

Rumus:

$$\frac{a}{b} \times \frac{b}{m} = \frac{a \times b}{n \times m}$$

Contoh:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \times \frac{2}{3} &= \frac{1 \times 2}{6 \times 3} \\ &= \frac{2}{18} \end{aligned}$$

3) Pembagian

Operasi pembagian pecahan dapat dilakukan dengan perkalian setelah mengubah pembilang menjadi penyebut seperti berikut:

Rumus:

$$\frac{a}{b} : \frac{b}{m} = \frac{a}{n} \times \frac{m}{b}$$

Contoh:

$$\begin{aligned} \frac{3}{8} : \frac{2}{3} &= \frac{3}{8} \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{3 \times 3}{8 \times 2} \\ &= \frac{9}{16} \end{aligned}$$

6.3.2 Geometri dan Pengukuran

a. Bangun Datar

1). Persegi Panjang

Persegi panjang memiliki sifat-sifat sebagai berikut:

- Memiliki empat buah sisi dan empat buah titik sudut.
- Terdiri dari dua pasang sisi sejajar yang saling berhadapan yang ukurannya sama panjang.
- Memiliki empat buah sudut yang sama besar yaitu 90° (sudut siku-siku).
- Mempunyai dua buah diagonal yang sama panjangnya.

Rumus:

Luas persegi panjang = $p \times l$

Keliling Persegi Panjang = $2 \times p + 2 \times l = 2 \times (p + l)$

Keterangan:

p = panjang

l = lebar

Contoh:

Halaman rumah Anita berbentuk persegi panjang dengan panjang 8m dan lebar 5m. Berapakah luas dan keliling rumah Anita?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Panjang rumah 8 m dan lebar 5 m

Ditanya:

Berapa luas dan keliling rumah Anta?

Dijawab:

$$\begin{aligned}\text{Luas persegi panjang} &= \text{panjang} \times \text{lebar} \\ &= 8 \text{ m} \times 5 \text{ m} \\ &= 40\text{m}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Keliling persegi panjang} &= 2 \times (p + l) \\ &= 2 \times (8 + 5) \text{ m} \\ &= 2 \times 13 \text{ m} \\ &= 26 \text{ m}\end{aligned}$$

Jadi luas dan keliling rumah Anita adalah 40 m² dan 26 m

2). Persegi

Persegi memiliki sifat-sifat seperti berikut:

- Memiliki empat buah sisi dan titik sudut.
- Memiliki dua pasang sisi yang posisinya sejajar dan sama panjang.
- Tiap sisinya memiliki ukuran yang sama.
- Memiliki empat sudut yang besarnya sama yaitu 90' (sudut sku-siku)

Rumus:

$$\text{Luas persegi} = \text{sisi} \times \text{sisi} = s^2$$

$$\text{Keliling persegi} = 4 \times \text{sisi}$$

Keterangan:

$$s = \text{sisi}$$

Contoh:

Lapangan olah raga SD Suka Maju berbentuk persegi dengan panjang 10 m. Berapakah luas dan keliling lapangan tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Lapangan olahraga berbentuk persegi dengan panjang 10 m

Ditanya:

Berapakah luas dan keliling lapangan tersebut?

Dijawab:

$$\begin{aligned} \text{Luas lapangan olah raga} &= s^2 \\ &= (10 \text{ m})^2 \\ &= 100 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Keliling lapangan olah raga} &= 4 \times 10 \text{ m} \\ &= 40 \text{ m} \end{aligned}$$

Jadi luas dan keliling lapangan tersebut adalah 100 m² dan 40 m

3). Segitiga

Segitiga memiliki sifat-sifat seperti:

- Memiliki tiga buah sisi dan tiga buah titik sudut.
- Jumlah dari ketiga sudut tersebut adalah 180°

Rumus:

$$\text{Luas segitiga} = \frac{1}{2} \times \text{alas} \times \text{tinggi}$$

$$\text{Keliling segitiga} = a + b + c$$

Dengan a , b , dan c adalah panjang ketiga sisi segitiga.

Contoh:

Diketahui segitiga ABC siku-siku di B. Jika Luasnya 150 cm^2 dan panjang AB 20 cm. Berapakah keliling segitiga ABC tersebut ?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

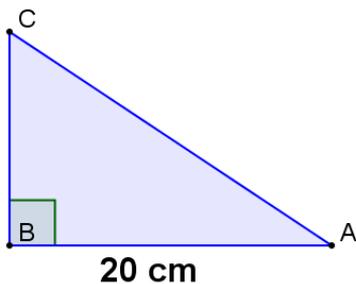
Diketahui:

Diketahui segitiga ABC yang luasnya 150 cm^2 dan panjang AB 20 cm.

Ditanya:

Berapakah keliling segitiga ABC tersebut ?

Dijawab:



Untuk mencari keliling segitiga ABC, panjang BC dan AC harus dicari terlebih dahulu.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \times AB \times BC \Rightarrow 150 = \frac{1}{2} \times 20 \times BC \\ &\Rightarrow 150 = 10 \times BC \\ &\Rightarrow BC = 15 \end{aligned}$$

Jadi diperoleh panjang $BC = 10$ cm

Karena segitiga ABC merupakan segitiga siku-siku, maka menurut Teorema Pythagoras, panjang sisi miring segitiga ABC adalah

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{AB^2 + BC^2} \\ &= \sqrt{20^2 + 15^2} \\ &= \sqrt{625} \\ &= 25 \end{aligned}$$

Jadi panjang $AC = 25$ cm

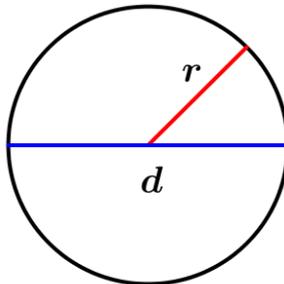
Karena panjang ketiga sisinya sudah diketahui, maka keliling segitiga ABC adalah

$$\begin{aligned} K &= AB + BC + AC \\ &= 20 \text{ cm} + 15 \text{ cm} + 25 \text{ cm} \\ &= 60 \text{ cm} \end{aligned}$$

Jadi keliling segitiga tersebut adalah 60 cm

4). Lingkaran

Di berikan contoh lingkaran seperti berikut:



Gambar 6.3. contoh lingkaran

Rumus:

$$\text{Luas lingkaran} = \pi \times r^2$$

$$\text{Keliling} = \pi \times d$$

Dikarenakan diameter (d) sama dengan dua kali jari-jari (r) maka rumus keliling dapat ditulis menjadi:

$$\text{Keliling} = \pi \times 2 \times r = 2 \times \pi \times r$$

Keterangan:

r = jari-jari lingkaran

$\pi = 3,14$ atau $\frac{22}{7}$; baca "phi"

d = diameter

Contoh:

Sebuah roda mempunyai diameter 24 cm. Berapakah luas dan keliling roda tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Roda mempunyai diameter 24 cm.

Ditanya:

Berapa luas dan keliling roda tersebut?

Dijawab:

$$\begin{aligned} \text{Luas} &= \pi \times r^2 \\ &= 3,14 \times (12 \text{ cm})^2 \\ &= 452,16 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

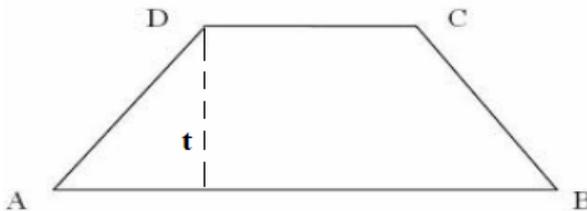
$$\begin{aligned} \text{Keliling} &= 2 \times \pi \times r \\ &= 2 \times 3,14 \times 12 \text{ cm} \\ &= 75,36 \text{ cm} \end{aligned}$$

Jadi luas dan keliling roda tersebut adalah 452,57cm² dan 75, 43 cm

5). Trapezium

Trapezium merupakan sebuah bangun datar yang dibentuk dari empat buah rusuk dimana dua diantara rusuk tersebut posisinya sejajar tetapi tidak sama panjangnya. Trapezium sendiri terbagi ke dalam tiga jenis yaitu trapezium sembarang (keempat rusuknya tidak sama panjang), trapezium sama kaki (sepasang rusuk sama panjang dan sepasang rusuk sejajar) serta trapezium siku-siku (keempat sudutnya siku-siku).

Berdasarkan gambar di bawah ini maka dapat ditentukan luas dan keliling trapezium yakni:



$$\text{Luas Trapezium} = \frac{\text{jumlah sisi sejajar} \times \text{tinggi}}{2}$$

Pada gambar tersebut; Jumlah sisi sejajar = $AB + CD$ dan t merupakan tinggi.

$$\text{Keliling trapezium} = AB + BC + CD + DA$$

Contoh:

1. Sebuah trapezium memiliki panjang sisi-sisi sejajar adalah 3cm dan 9cm serta tinggi 5cm. Berapakah luas trapezium tersebut? Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Trapezium dengan panjang sisi-sisi sejajar adalah 3 cm dan 9 cm serta tinggi 5 cm.

Ditanya:

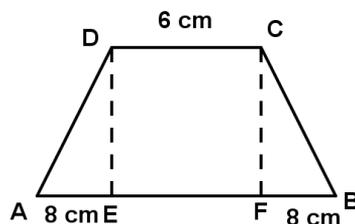
Berapakah luas trapezium tersebut?

Dijawab:

$$\begin{aligned} \text{Luas} &= \frac{\text{jumlah sisi sejajar} \times \text{tinggi}}{2} \\ &= \frac{(3\text{ cm} + 9\text{ cm}) \times 5\text{ cm}}{2} \\ &= \frac{12\text{ cm} \times 5\text{ cm}}{2} \\ &= 30\text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Jadi luas trapesium tersebut adalah 30 cm^2

2. Perhatikan gambar di bawah ini.



ABCD merupakan trapesium sama kaki dengan CDEF sebagai suatu persegi $EF = 10\text{ cm}$. Berapakah a. panjang EF, b. panjang alas trapesium, c. keliling trapesium ABCD

Penyelesaian:

- Karena panjang CDEF merupakan persegi, maka panjang $EF = CD = 6\text{ cm}$.
- Panjang alas trapesium (AB) dapat dihitung dengan:

$$\begin{aligned} AB &= AE + EF + FB \\ &= 8\text{ cm} + 6\text{ cm} + 8\text{ cm} \\ &= 22\text{ cm} \end{aligned}$$

Jadi panjang alas trapezium (AB) adalah 22 cm

- Sebelum menghitung keliling trapesium, dihitung dahulu panjang AD, yaitu

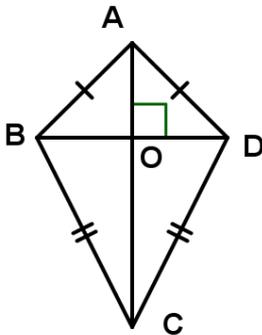
$$AD = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

Keliling trapesium ABCD adalah

$$\begin{aligned} AB + BC + CD + AD &= (22 + 10 + 10 + 6) \text{ M} \\ &= 54 \text{ CM} \end{aligned}$$

6). **Layang - layang**

Layang-layang adalah segi empat yang mempunyai dua pasang sisi berdekatan sama panjang.



Rumus:

$$\text{Luas layang-layang} = \frac{1}{2} \times AC \times BD$$

$$\begin{aligned} \text{Keliling layang-layang} &= AB + BC + CD + AD \\ &= 2 \times (AB + bc) \end{aligned}$$

Selanjutnya diagonal AC dan BD disebut dengan d_1 dan d_2 (tidak harusurut, bisa dibolak-balik).

Contoh:

1. Sebuah layang-layang memiliki panjang diagonal horizontal 5 cm dan diagonal vertikal 10 cm. Berapakah luas layang-layang tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Layang-layang dengan panjang diagonal horizontal 5 cm dan diagonal vertikal 10 cm.

Ditanya:

Berapakah luas layang-layang tersebut?

Dijawab:

$$\begin{aligned} \text{Luas layang-layang} &= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \\ &= \frac{1}{2} \times 10 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \\ &= 5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm} \\ &= 25 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

Jadi luas layang-layang tersebut adalah 25 cm².

2. Sebuah layang-layang memiliki panjang sisi yaitu 9 cm dan 13 cm. Berapakah keliling dari layang-layang tersebut?

$$\begin{aligned} \text{Keliling layang-layang} &= 2 \times (9 \text{ cm} + 13 \text{ cm}) \\ &= 2 \times 22 \text{ cm} \\ &= 44 \text{ cm} \end{aligned}$$

Jadi keliling layang - layang adalah: 44 cm

7). Belah ketupat

Belah ketupat merupakan bangun datar yang terbentuk oleh 4 buah rusuk yang panjang sama dan mempunyai 2 pasang sudut bukan siku-siku yang masing-masing besarnya sama dengan sudut yang ada di hadapannya.

Rumus:

$$\text{Luas belah ketupat} = \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2$$

$$\text{Keliling belah ketupat} = 4 \times s$$

Keterangan:

d_1 = panjang diagonal 1

d_2 = panjang diagonal 2

s = panjang sisi

Contoh:

1. Sebuah bangun yang berbentuk belah ketupat mempunyai diagonal 10 cm dan 6 cm.
Berapakah luas bangun tersebut?

$$\begin{aligned}
 \text{Luas belah ketupat} &= \frac{1}{2} \times d_1 \times d_2 \\
 &= \frac{1}{2} \times 10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \\
 &= 5 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \\
 &= 30 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

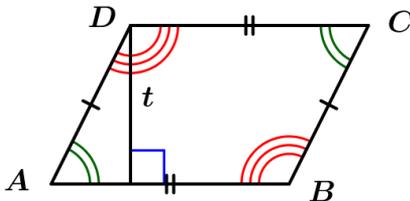
2. Sebuah belah ketupat diketahui memiliki panjang sisi 8 cm.
Berapakah keliling belah ketupat tersebut?

$$\begin{aligned}
 \text{Keliling belah ketupat} &= 4 \times s \\
 &= 4 \times 8 \text{ cm} \\
 &= 32 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

Jadi keliling belah ketupat tersebut adalah 32cm

8). Jajar Genjang

Jajar genjang terbentuk oleh dua buah pasang rusuk yang sama panjang dan sejajar dengan pasangannya, serta mempunyai dua buah pasang sudut yang masing-masing besarnya sama dengan sudut di depannya.



Rumus:

$$\text{Luas jajar gendajang} = \text{alas} \times \text{tinggi}$$

$$\begin{aligned} \text{Keliling jajar genjang} &= AB + BC + CD + AD \\ &= 2 (AB + BC) \end{aligned}$$

Contoh:

Sebuah jajar genjang memiliki panjang alas 10 cm dan tinggi 6 cm. Berapakah luas jajar genjang tersebut?

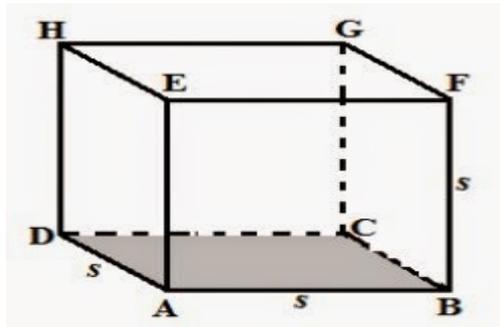
$$\begin{aligned} \text{Luas} &= \text{alas} \times \text{Tinggi} \\ &= 10 \text{ cm} \times 6 \text{ cm} \\ &= 60 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

Jadi luas jajaran genjang tersebut adalah 60 m²

b. Bangun Ruang

1). Kubus

Kubus dapat digambarkan seperti berikut:



Gambar 6.4. Contoh kubus

Pada gambar tersebut dapat menentukan volume dari kubus yaitu:

Rumus:

$$v = s \times s \times s$$

$$v = s^3$$

Keterangan:

v = volume

s = panjang rusuk

Contoh:

Salah satu sisi kubus memiliki panjang 4 cm. berapakah volume dari kubus tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Sisi kubus memiliki panjang 4 cm.

Ditanya:

Berapakah volume dari kubus tersebut?

Dijawab:

$$v = s \times s \times s$$

$$v = s^3$$

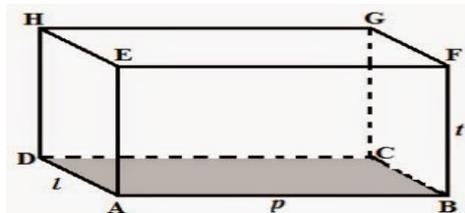
$$= 4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$$

$$= 64 \text{ cm}^3$$

Jadi volum kubus tersebut adalah 64 cm^3

2). Balok

Balok dapat digambarkan seperti berikut:



Gambar 6.5. Contoh balok

Rumus:

$$\begin{aligned}\text{Luas alas balok} &= \text{panjang} \times \text{lebar} \\ &= p \times l\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Volume balok} &= \text{panjang} \times \text{lebar} \times \text{tinggi} \\ &= p \times l \times t\end{aligned}$$

Keterangan:

p = panjang

l = lebar

t = tinggi

Contoh:

Sebuah kolam renang memiliki ukuran panjang 25 m, lebar 50 m, dan tinggi 15 m. Berapakah volume dari kolam renang tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Kolam renang dengan ukuran panjang 25 m, lebar 50 m, dan tinggi 15 m.

Ditanya:

Berapakah volume dari kolam renang tersebut?

Dijawab:

$$\begin{aligned}\text{Volume balok} &= \text{panjang} \times \text{lebar} \times \text{tinggi} \\ v &= 25 \text{ m} \times 50 \text{ m} \times 15 \text{ m} \\ &= 19750 \text{ m}^3\end{aligned}$$

Jadi volume dari kolam renang tersebut adalah 19750 m^3

3). Limas

Limas merupakan bangun ruang yang alasnya bersegi banyak (segitiga, segiempat, segilima, dsb) dimana sisi tegaknya memiliki bentuk segitiga yang saling berpotongan di satu titik.

Rumus:

$$\text{Volume luas} = \frac{1}{3} \times \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

$$v = \frac{1}{3} \text{ luas alas} \times \text{tinggi}$$

Contoh:

Limas dengan alas berbentuk segitiga yang memiliki panjang 6 cm, lebar 5 cm, dan tinggi 10 cm. Berapakah volume limas tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Limas dengan alas berbentuk segitiga yang memiliki panjang 6 cm, lebar 5 cm, dan tinggi 10 cm.

Ditanya:

Berapakah volume limas tersebut?

Dijawab:

$$v = \frac{1}{3} \text{ luas alas} \times \text{tinggi}$$

Pada limas tersebut alasnya berbentuk segitiga maka luas segitiga $\frac{1}{2} \text{ luas alas} \times \text{tinggi}$ sehingga volume limas yang alasnya berbentuk segitiga adalah:

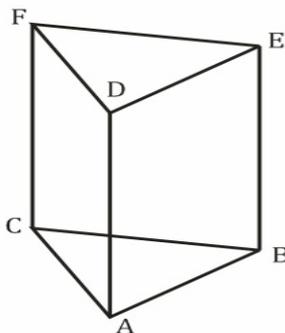
$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times p \times l \right) \times t \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times 8 \times 7 \right) \times 12 \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{1 \times 8 \times 7}{2} \right) \times 12 \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{56}{2} \times 12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1 \times 56 \times 12}{3 \times 2} \\
 &= \frac{672}{6} \\
 &= 112 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Jadi volum limas tersebut adalah

4). Prisma

Salah satu contoh prisma adalah prisma segitiga karena bentuk alas dari bangun tersebut adalah segitiga seperti gambar berikut:



Gambar 6.6. Contoh prisma

Prisma segitiga ini terdiri dari beberapa bagian yaitu: tutup, alas, dan selimut sehingga dalam menentukan luas prisma adalah:

Rumus:

$$\text{Luas prisma} = \text{luas alas} + \text{luas tutup} + \text{luas selimut}$$

$$\text{Volume prisma} = \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

Pada prisma segitiga maka volume prisma segitiga adalah:

Rumus:

$$v = \frac{1}{2} \times (\text{alas segitiga} \times \text{tinggi segitiga}) \times \text{tinggi prisma}$$

Contoh:

Sebuah prisma memiliki alas yang berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi siku-sikunya 7cm dan 6 cm, serta volumenya 210 cm^3 . Berapakah tinggi prisma tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Prisma memiliki alas yang berbentuk segitiga siku-siku dengan panjang sisi siku-sikunya 7cm dan 6 cm, serta volumenya 210 cm^3 .

Ditanya:

Berapakah tinggi prisma tersebut?

Dijawab:

$$\text{Volume prisma} = \text{luas alas} \times \text{tinggi}$$

Pada prisma segitiga maka volume prisma segitiga adalah:

$$v = \frac{1}{2} \times (\text{alas} \times \text{tinggi segitiga}) \times \text{tinggi prisma}$$

$$210 = \left(\frac{1}{2} \times 7 \times 6 \right) \times \text{tinggi prisma}$$

$$210 = \left(\frac{1 \times 7 \times 6}{2} \right) \times \text{tinggi prisma}$$

$$210 = \frac{42}{2} \times \text{tinggi prisma}$$

$$210 = 21 \times \text{tinggi prisma}$$

$$\text{tinggi prisma} = \frac{210}{21}$$

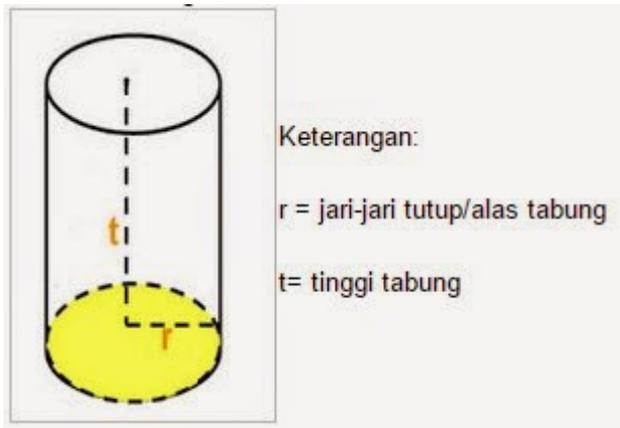
$$= 10 \text{ cm}$$

Jadi tinggi prisma tersebut adalah 10 cm

5). Tabung

Tabung merupakan bangun ruang yang dibatasi oleh dua buah sisi yang kongruen dan bersifat sejajar serta memiliki bentuk lingkaran dengan sebuah sisi yang lengkung.

Tabung dapat digambarkan seperti berikut:



Gambar 6.7. Contoh tabung

Rumus:

$$\text{luas tabung} = \pi r^2$$

$$\text{volume tabung} = \text{alas} \times \text{tinggi}$$

atau

$$\text{volume tabung} = \pi r^2 t$$

Keterangan:

$$r = \text{jari-jari}$$

$$t = \text{tinggi}$$

$$\pi = 3,14 \text{ atau } \frac{22}{7}$$

Contoh:

Sebuah tabung memiliki jari-jari 12 cm dan tingginya 7 cm. Berapakah volume dari tabung tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Tabung dengan jari-jari 12cm dan tingginya 7cm.

Ditanya:

Berapakah volume dari tabung tersebut?

Dijawab:

$$\begin{aligned}
 v &= \frac{22}{7} \times 12^2 \times 7 \\
 &= \frac{22}{7} \times 144 \times 7 \\
 &= \frac{22 \times 144 \times 7}{7} \\
 &= \frac{22176}{7} \\
 &= 3168 \text{ cm}^2
 \end{aligned}$$

Jadi volume dari tabung tersebut adalah 3168 cm^3

6). Kerucut

Kerucut memiliki bentuk alas seperti lingkaran dan pada bagian atasnya lancip seperti limas, maka rumus volumenya adalah:

Rumus:

$$\text{Volume kerucut} = \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times t$$

Keterangan:

$$r = \text{jari-jari}$$

$$t = \text{tinggi}$$

$$\pi = 3,14 \text{ atau } \frac{22}{7}$$

Contoh:

Sebuah nasi tumpeng yang berbentuk kerucut memiliki jari-jari 6 cm dan tinggi 12 cm. Berapakah volume dari tumpeng kerucut tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Tumpeng yang berbentuk kerucut memiliki jari-jari 6 cm dan tinggi 12 cm.

Ditanya:

Berapakah volume dari tumpeng kerucut tersebut?

Dijawab:

$$\begin{aligned}
 \text{volume kerucut} &= \frac{1}{3} \times \pi r^2 \times t \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{22}{7} \times 6^2 \times 12 \\
 &= \frac{1 \times 22 \times 36 \times 12}{3} \\
 &= \frac{9504}{3}
 \end{aligned}$$

Jadi volum tumpeng yang berbentuk kerucut tersebut adalah 3168 cm³

7). Bola

Rumus:

$$\text{volume bola} = \frac{4}{3} \pi \times r^3$$

Keterangan:

r = jari-jari

Rumus volume bola sangat mirip dengan volume kerucut karena luas volume kerucut sama dengan setengah dari volume bola.

Contoh:

Sebuah bola basket memiliki jari-jari 7 cm. Berapakah volume dari bola tersebut?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Diketahui:

Bola memiliki jari-jari 7 cm.

Ditanya:

Berapakah volume dari bola tersebut?

Dijawab:

$$\begin{aligned}
 \text{volume bola} &= \frac{4}{3} \pi \times r^3 \\
 &= \frac{4}{3} \times \frac{22}{7} \times 7^3 \\
 &= \frac{4 \times 22 \times 343}{3 \times 7} \\
 &= \frac{30184}{21} \\
 &= 1437,33 \text{ cm}^3
 \end{aligned}$$

Jadi volum bola tersebut adalah: 1437,33 cm^3

c. Pengukuran waktu, berat, dan panjang

Ada 3 jenis pengukuran yaitu pengukuran waktu, berat dan panjang dengan satuan pengukurannya masing-masing yang sering dilakukan seseorang di kehidupannya sehari-hari.

1). Satuan Pengukuran Waktu

Dalam kehidupan sehari-hari pasti sering mendengar dan menggunakan istilah detik, menit, jam, hari, minggu, bulan, tahun, dan banyak istilah lainnya. Di dalam pembelajaran matematika, istilah-istilah tersebut digunakan sebagai satuan pengukuran waktu, yang artinya mewakili atau menunjukkan waktu-waktu tertentu. Tabel berikut menunjukkan daftar konversi Satuan pengukuran waktu dalam matematika:

Tabel 6.1. Konversi Satuan pengukuran waktu

1 menit	60 detik
1 jam	60 menit
1 jam	3600 detik
1 hari	24 jam
1 minggu	7 hari
1 bulan	30 hari
1 bulan	4 minggu
1 tahun	52 minggu
1 tahun	12 bulan
1 lustrum	5 tahun
1 windu	8 tahun
1 dasa warsa	10 tahun
1 abad	100 tahun

Jumlah hari pada masing-masing Bulan, adalah sebagai berikut.

Tabel 6.2. Konversi Satuan pengukuran waktu

Bulan	Jumlah hari
Januari	31
Februari	28 atau 29
Maret	31
April	30
Mei	31
Juni	30
Juli	31
Agustus	31
September	30
Oktober	31
November	30
Desember	31

Contoh:

1. Tentukanlah $2 \text{ jam} + 10800 \text{ detik} + 300 \text{ menit} = \dots \text{jam}$

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Mengubah satuan detik dan menit menjadi satuan jam yakni:

$$10800 \text{ detik} = 10800 : 3600 = 3 \text{ jam}$$

$$300 \text{ menit} = 300 : 60 = 5 \text{ jam}$$

Sehingga $2 \text{ jam} + 10800 \text{ detik} + 300 \text{ menit}$

$$= 2 \text{ jam} + 3 \text{ jam} + 5 \text{ jam}$$

$$= 10 \text{ jam}$$

2. Ivan menaiki sebuah bus dari Surabaya menuju Yogyakarta pada pukul 04.30 lama perjalanan yang ditempuh oleh bus tersebut adalah 7 jam 35 menit. Pukul berapakah Ivan tiba di Yogyakarta?

Pertanyaan ini dapat diselesaikan seperti berikut:

Ivan berangkat menaiki bus pukul = 04.30

Lama perjalanan = 7 jam 35 menit

Penyelesaiannya langsung ditambahkan saja yakni:

Karena 1 jam hanya memiliki 60 menit maka 11.65 diubah menjadi 12.05 sehingga Ivan tiba di Yogyakarta pada pukul 12.05.

3. Pada tahun 2017 usia Anwar adalah $\frac{1}{2}$ dari usia ibunya. Apabila ibunya Anwar lahir pada tahun 1971 maka pada tahun berapakah Anwar dilahirkan?

Penyelesaian:

Ibu Anwar lahir pada tahun 1971 maka pada tahun 2017 usianya adalah $= 2017 - 1971 = 46$ tahun.

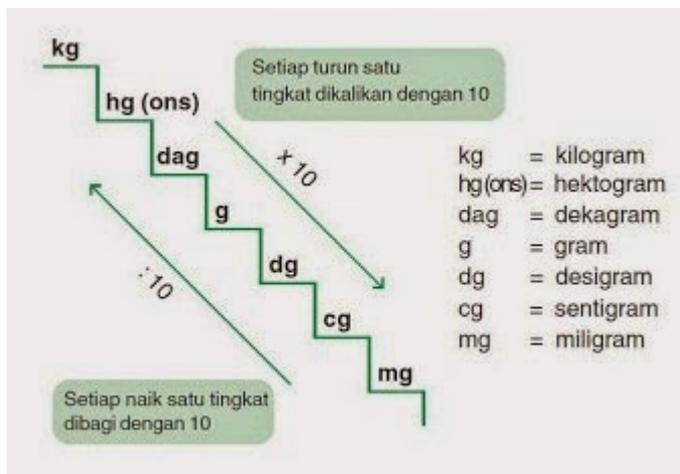
Usia Anwar adalah $\frac{1}{2}$ dari usia ibunya, maka usia Anwar $= \frac{1}{2} \times 46 = 23$ tahun.

Pada tahun 2017 usia Anwar adalah 23 tahun, maka Anwar dilahirkan pada tahun $= 2017 - 23 = 1994$

2). Satuan Pengukuran Berat

Di kehidupan sehari-hari, satuan berat sering ditemui. Misalnya ketika menimbang berat badan, ukuran berat badan dinyatakan dalam satuan

ukuran kilogram atau ketika membeli beras di pasar, biasanya jumlahnya ditentukan dengan satuan berat gram atau kilogram. Berikut ini diberikan satuan berat lainnya yang biasa digunakan dalam pelajaran dan perhitungan matematika.



Gambar 6.8. Tangga satuan berat

Tabel berikut menunjukkan daftar konversi Satuan pengukuran berat dalam matematika.

Tabel 6.3. Konversi satuan pengukuran berat

1 kg	10 ons
1 kg	1000 gram
1 ons	100 gram
1 kg	10 ons
1hg	1 ons
1 kwintal	100 kg
1 kg	2 pon
1 ton	10 kuintal
1 pon	5 ons
1 kg	10 ons
1 ton	1000 kg

Contoh:

Sebuah toko sembako mempunyai 5 karung beras dengan berat yang berbeda. Karung pertama memiliki berat 3,5 kuintal, karung yang kedua beratnya adalah 250 kg, karung ketiga sebanyak 0,5 ton, serta karung keempat memiliki berat 2.500 ons. Berapa kilogramkah keseluruhan berat beras yang ada di tokoh sembako tersebut?

Penyelesaian:

Ubah satuan yang berbeda menjadi kilogram sehingga:

$$3,5 \text{ kuintal} = 3,5 \times 100 \text{ kg} = 350 \text{ kg}$$

$$0,5 \text{ ton} = 0,5 \times 1000 \text{ kg} = 500 \text{ kg}$$

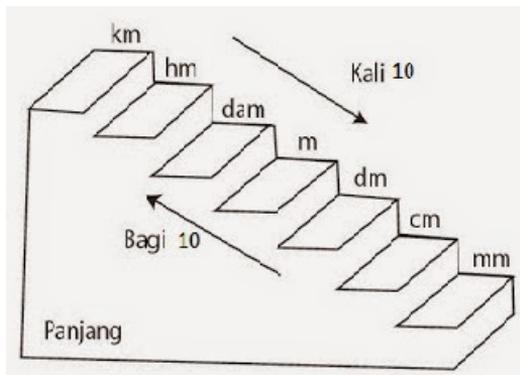
$$2.500 \text{ ons} = 2500 : 10 = 250 \text{ kg}$$

Kemudian lakukan tambahkan

$$350 + 500 + 250 + 250 = 1350 \text{ kg}$$

3). Satuan Pengukuran Panjang

Sama seperti urutan pada satuan berat, tiap satuan panjang dituliskan dalam sebuah tangga yang berurutan dimana apabila ingin mengubah sebuah satuan menjadi satuan yang ada satu tingkat dibawahnya, harus mengalikannya dengan 10. Sementara jika ingin merubah suatu satuan panjang menjadi satuan lain yang berada satu tingkat di atasnya, maka harus membagi nilainya dengan 10. Berikut adalah gambar urutan satuan panjang dalam matematika:



Gambar 6.9. Tangga satuan panjang

Tabel berikut menunjukkan daftar konversi Satuan pengukuran panjang dalam matematika.

Tabel 6.4. *Konversi satuan pengukuran panjang*

1 km	10 hm
1 km	1000 m
1 km	100000 cm
1 km	1000000 mm
1 m	100 cm
1 m	0,1 dam
1 m	0,001 km
1 m	10 dm
1 m	1000 mm

Contoh:

Yuda membeli seutas tali sepanjang 50 m. Lalu tali itu ia potong sepanjang 60 dm untuk digunakan sebagai tali jemuran. Lalu ia potong lagi tali itu sepanjang 500 cm untuk digunakan sebagai tali pengikat kambing. Berapakah sisa tali yang dimiliki Yuda sekarang?

Penyelesaian:

Ubah satuannya menjadi centimeter

$$\begin{aligned} 50 \text{ m} - 60 \text{ dm} - 500 \text{ cm} &= 5000 \text{ cm} - 600 \text{ cm} - 500 \text{ cm} \\ &= 3900 \text{ cm} \end{aligned}$$

Jadi siswa tali tersebut adalah 3900 cm

7

MATEMATIKA REFLEKTIF

7.1 Pengertian

Konsep matematika muncul dari usaha manusia memecahkan persoalan dunia nyata (Marsigit, dkk; 2015 : 156), ini berarti bahwa matematika terbentuk dari pengalaman manusia dalam dunianya secara empiris kemudian pengalaman itu diproses di dalam rasio yang dikelola secara analisis melalui penalaran di dalam struktur kognitif seseorang. Agar sampai pada terbentuknya konsep-konsep matematika yang mudah dipahami oleh orang lain dan dapat dimanipulasi secara tepat, maka digunakan bahasa matematika atau bahasa formal matematik yang sifatnya universal. Marsigit, dkk; (2015) berpendapat bahwa matematika sebagai bahasa formal yaitu kumpulan dari lambang-lambang atau huruf-huruf yang menyatakan proposisi. Lebih lanjut Marsigit, dkk menyatakan bahwa bahasa formal dapat diterapkan dalam matematika jika mempunyai struktur yang logis, jelas, transparan, tidak menimbulkan penafsiran ganda dan dapat ditentukan nilai kebenarannya apakah benar atau salah. Penggunaan bahasa formal matematik dapat dilakukan melalui tahap penentuan anggapan dasar sebagai *self - evident* kemudian dibuat kesepakatan, defenisi, aksioma, dan teorema-teorema (Marsigit, dkk; 2015).

Penggunaan bahasa formal matematik akan terjadi dengan baik jika siswa mampu mengkonstruk pembelajaran yang diterima dari guru atau teman sebayanya. Mengkonstruk matematika dapat dilakukan secara sintetik agar mencapai kebenaran matematik. Ini sejalan dengan pendapat

Marsigit, dkk (2015) bahwa kebenaran matematik sebagai kebenaran sintetik merupakan konstruksi dari suatu konsep atau beberapa konsep yang menghasilkan informasi baru. Konsep yang murni diturunkan dari data empiris menghasilkan suatu keputusan yang bersifat *a posterior*, tetapi sintetis yang diturunkan dari intuisi murni menghasilkan putusan *a priori*. Putusan matematika yang bersifat sintetik *a priori* merupakan putusan yang diperoleh secara *a priori* dari pengalaman kemudian konsep yang diperoleh tidak bersifat empiris melainkan bersifat murni (Marsigit, dkk ;2015).

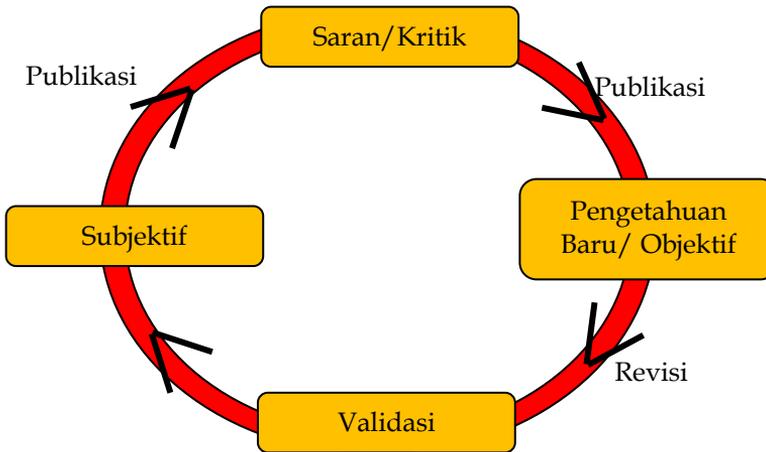
Matematika yang dipandang pragmatis memiliki nilai. Setiap nilai matematika bersifat intrinsic, ekstrinsik atau sistemik. Jika seseorang menguasai matematika hanya untuk diri sendiri maka pengetahuan matematika orang tersebut bersifat intrinsic, jika seseorang dapat menerapkan matematika untuk kehidupan sehari-hari maka pengetahuan matematika orang tersebut bersifat ekstrinsik, dan jika seseorang dapat mengembangkan matematika dalam kehidupan masyarakat matematika maka pengetahuan matematika orang tersebut bersifat sistemik. Nilai matematika dapat digunakan dalam mengembangkan pertimbangan kapasitas matematika (Marsigit, dkk; 2015 : 157). Pertimbangan kapasitas matematika digunakan untuk mengetahui mengapa seseorang memikirkan matematika.

Refleksi pemikiran matematika membutuhkan interaksi social supaya dapat memberikan kesempatan untuk memproduksi konsep-konsep matematika intrinsic dengan ekstrinsik atau sistemik. Di sinilah akan terjadi hubungan nilai matematika yang bersifat subjektif dan objektif. Dalam matematika subjektif (matematika yang terkait dengan pengetahuan dari diri manusia), matematika tidaklah bersifat netral dan bebas nilai sehingga membutuhkan landasan social bagi perkembangannya (Marsigit, dkk; 2015:168). Dengan demikian mempelajari matematika adalah mem-pertemukan pengetahuan subjektif dan objektif matematika melalui interaksi social dalam menguji dan mempresentasikan pengetahuan-pengetahuan baru yang diperoleh.

Usaha untuk mempelajari pengetahuan objektif matematika siswa perlu mengembangkan prosedur seperti: mengikuti langkah yang dibuat orang lain, membuat langkah secara informal, menentukan langkah awal, menggunakan langkah yang telah dikembangkan, mendefinisikan langkah sehingga dapat dipahami orang lain, membandingkan berbagai langkah, dan menyesuaikan langkah (Marsigit; 2015: 169). Langkah-langkah tersebut dapat membuat siswa memperoleh konsep matematika yang teraktualisasi dalam dirinya sehingga dapat dikatakan bahwa pengetahuan matematika siswa tersebut bersifat subjektif, tetapi pengetahuan subjektif matematika-nya belum tentu sesuai dengan pengetahuan objektifnya. Untuk mengetahui apakah pengetahuan subjektif matematika telah sesuai dengan pengetahuan objektif maka siswa perlu melakukan kegiatan publikasi.

Kegiatan publikasi matematika dapat berupa tugas yang diberikan guru untuk menyelesaikan pekerjaan rumah, diskusi, menulis makalah/ karya ilmiah/ buku, mengikuti ujian. Interaksi social antara siswa dengan guru atau dengan teman sebaya akan memberikan kegiatan mengkritisi konsep yang belum benar menjadi benar sehingga siswa memperoleh perbaikan konsep, dengan demikian pengetahuan subjektif matematika seseorang akan sama dengan pengetahuan objektifnya. Hasil kegiatan publikasi siswa akan mendapatkan saran atau kritikan sebagai input untuk meluruskan atau memantapkan konsep yang belum benar dari ahli, guru atau teman sebayanya. Hasil perbaikan atas saran/kritikkan akan dipublikasikan kembali dalam bentuk koreksi, nilai, tulisan atau lisan sehingga siswa mendapat pengetahuan baru, di sinilah diharapkan siswa memperoleh pengetahuan yang objektif dari hasil revisi dan memperoleh validasi oleh ahli/guru atau temanya.

Secara ringkas dapat diperhatikan pada gambar berikut:



Gambar 7.1. *Hakekat sistem belajar matematika diadopsi dari Ernest,P*

7.2 Kedudukan

Kedudukan matematika refleksi menempati posisi paling atas setelah matematika formal dimana siswa sudah dapat merefleksikan pembelajaran yang terjadi dengan mengkomunikasikan matematika secara benar dan bermakna. Dalam pendekatan matematika realistik reflektif, pembelajaran berangkat dari matematika konkret dan menuju ke matematika semi konkret, matematika ikonik, matematika semi formal, dan matematika formal. Dari tahapan matematika konkret menuju matematika formal dikenal sebagai pengetahuan subjektif, yang selanjutnya dalam prosesnya diharapkan dapat membangun pengetahuan objektif. Pengetahuan objektif dapat terbentuk melalui publikasi, sehingga ada tahapan berpikir reflektif. Artinya tahapan berpikir reflektif dilakukan dalam bentuk mempublikasikan pengetahuan subjektif agar dapat diperoleh pengetahuan objektif.

Pengetahuan objektif yang diperoleh karena seseorang mengembangkan pemikiran matematisnya. Untuk menunjang proses berpikir matematis diperlukan pemikiran matematika yang terdiri dari ide, metode, dan sikap matematis. Pemikiran matematika yang terkait dengan metode matematika terdiri dari pemikiran induktif, pemikiran analogis, pemikiran deduktif, pemikiran integratif, pemikiran perkembangan, pemikiran

abstrak, pemikiran yang menyederhanakan, berpikir bahwa menggeneralisasi, berpikir bahwa berspesialisasi, Katagiri (2006). Selanjutnya berpikir dapat berupa melambangkan dan mengungkapkan dalam bentuk nomor, jumlah dan angka. Stacey, (2006) mendefinisikan kategori ini sebagai proses matematis yang terdiri dari:

1. Kekhususan; dengan mencoba kasus-kasus khusus, melihat contoh-contoh
2. Generalisasi; dengan mencari pola dan hubungan
3. Dugaan; dengan memprediksi hubungan dan hasil
4. Meyakinkan; menemukan dan mengkomunikasikan alasan mengapa sesuatu itu benar

Jadi ketika berpikir matematis berada pada tingkat tinggi, siswa dapat mencapai tingkat kemampuan matematika yang baik. Pemikiran matematis juga dapat meningkatkan kekuatan pembuatan estimasi dan pembulatan, pengukuran dan konstruksi, pengumpulan dan pengolahan data, merepresentasikan dan menafsirkan data, mengenali dan merepresentasikan hubungan secara matematis, menggunakan algoritma dan hubungan, pemecahan masalah, dan pengambilan keputusan di kalangan siswa.

Isoda dan Katagiri (2012) berpendapat bahwa pemikiran matematis dapat dibagi menjadi tiga kategori antara lain:

1. Sikap matematika
2. Pemikiran matematika terkait dengan metode matematika
3. Pemikiran matematika terkait dengan isi matematis

Kategori pertama dianggap sebagai kekuatan pendorong di belakang dua kategori terakhir.

Sikap matematis adalah faktor afektif yang sangat penting dalam menentukan perilaku siswa dalam pemikiran matematis. Sikap terhadap matematika telah lama dipelajari (Kulm, 1980, McLeod 1992, Di Martino & Zan, 2011; Hannula, 2002; Ruffell et al., 1998). Pada awalnya 1969, Aiken dan Aiken menyarankan dua kategori sikap yakni: sikap terhadap sains (ketika objek dari sikap sains itu sendiri) dan sikap ilmiah (ketika objek adalah proses dan aktivitas ilmiah, yaitu epistemologi ilmiah), yang

kemudian (Hart, 1989; NCTM, 1989; Gómez-Chacón, 2000) diadaptasi terhadap matematika dan sikap denominasi terhadap matematika dan sikap matematis. Sikap terhadap matematika mengacu pada penilaian dan memperhatikan minat subjek serta keinginan untuk mempelajarinya.

Sebagai komponen afektif, sikap dapat dinyatakan sebagai minat, kepuasan, rasa ingin tahu, penilaian dan sebagainya. Sikap matematis siswa diwujudkan dalam cara mereka mendekati tugas seperti pemikiran fleksibel, keterbukaan mental, semangat kritis, objektivitas dan sebagainya yang penting dalam matematika (NCTM; 1989). Dimensi afektif matematik yakni perbedaan antara apa yang dapat dilakukan subjek (disposisi matematis dan kebiasaan pikiran) dan apa yang disukai subjek. Di sinilah Schoenfeld (1992), berpendapat bahwa siswa membutuhkan proses sosialisasi, untuk dijiwai dengan kebiasaan pikiran dan perilaku matematis seperti yang disebutkan di atas. Konsekuensinya, adalah kewajiban para guru untuk menciptakan lingkungan yang mendukung semangat ingin tahu, mengejar gagasan, penelitian dan pertanyaan yang terkait dengan praktik matematika.

Hal penting lainnya adalah pemikiran matematika yang terkait dengan konten matematika yang mencakup kumpulan gagasan, unit, ungkapan, operasi, algoritma, perkiraan, sifat dasar dan formula seperti yang dinyatakan dalam persyaratan Stacey untuk pemecahan masalah. Oleh karena itu penting bagi individu untuk memperoleh keterampilan yang terkait dengan pemikiran matematis, sehingga bagaimana pemecahan masalah memberi banyak kesempatan bagi perkembangan pemikiran matematis, dan bagaimana pelajaran dapat dibuat untuk mengembangkan pemikiran matematis. Siswa harus belajar bagaimana membenarkan hasil mereka untuk menjelaskan mengapa mereka menganggapnya benar, dan untuk meyakinkan guru dan sesama siswa yang lainnya, di sinilah terjadi reflektif.

7.3 Pembelajaran

Kegiatan matematika reflektif merupakan tahapan dimana siswa mengkomunikasikan apa yang sudah diperoleh untuk merefleksikan kembali

kebenaran yang diperoleh dan memperoleh masukan dari teman sebayanya dan juga guru sehingga menghasilkan pengetahuan yang objektif.

Contoh:

Fani dan Nona mendapat tugas untuk membaca buku di perpustakaan sekolah. Fani dapat membaca 3 halaman dalam satu jam, dan Nona dapat membaca 4 halaman dalam satu jam. Jika mereka terus membaca tak berhenti, dan Fani mulai membaca pada jam 12.00, sedangkan Nona mulai jam 13.00, Pada jam berapa mereka sama-sama menghabiskan halaman bacaan yang sama banyaknya?

Pada tahap matematika reflektif ini siswa sudah dapat mengkomunikasikan matematika secara baik dengan beberapa langkah penyelesaian yang dapat dijadikan acuan seperti berikut:

Cara 1:

Tentu dalam penyelesaian soal ini, siswa yang memahami konsep Kelipatan Persekutuan Terkecil (KPK) dapat saja menggunakan konsep tersebut untuk menjawab soal ini. KPK dari 3 dan 4 adalah 12. Jadi Fani akan memerlukan 4 jam dan Nona memerlukan 3 jam. Sehingga 12 halaman buku akan selesai dibaca oleh mereka pada jam 16.00, yaitu 4 jam sesudah Fani mulai membaca pada jam 12.00, yaitu pada jam 16.00 Atau 3 jam setelah Nona membaca yaitu 3 jam setelah jam 13.00, adalah jam 16.00.

Cara 2

Jawaban disusun dalam table berikut:

Tabel 7.1 waktu dan jumlah halaman buku yang dibaca

Jam	Halaman buku yang dibaca	
	Fani	Nona
12.00 – 13.00	3	0
13.00 – 14.00	6	4
14.00 – 15.00	9	8
15.00 – 16.00	12	12

Dengan memperhatikan table tersebut jelaslah bahwa Fani dan Nona akan membaca jumlah halaman buku yang sama di perpustakaan pada pukul 16.00.

Cara 3:

Tabel 7.2.

Nama	Halaman buku yang dibaca				
Nona	0	0	4	8	12
Fani	0	3	6	9	12
Jam	12	13	14	15	16

Dari tabel 7.2 ini ternyata bahwa pada jam 16.00 Fani dan Nona telah membaca jumlah halaman yang sama .

Cara 4:

Misalnya: setelah x jam, Fani membaca sejumlah halaman yang sama dengan yang dibaca Nona. Dimana Fani akan membaca selama $(x + 1)$ jam. Dalam 1 jam Nona membaca 3 halaman, dan Fani 4 halaman. Dengan demikian, terjadi hubungan berikut:

$$A \times 16 = (A + 1) \times 12$$

$$16A = 12A + 12$$

$$16A - 12A = 12$$

$$4A = 12$$

$$A = 3$$

Jadi mereka menghabiskan halaman yang sama banyak setelah Fani membaca 4 jam, dan Nona membaca 3 jam. Hal itu terjadi pada pukul 16.00.

Dari cara - cara penyelesaian di atas dapat diketahui bahwa siswa dapat mengkomunikasikan gagasannya sebagai kegiatan matematika reflektif siswa tersebut.

DAFTAR PUSTAKA

- Ariyadi Wijaya. (2012). Pendidikan Matematika Realistik. Suatu Alternatif Pendekatan Pembelajaran Matematika. Graha Ilmu. Yogyakarta.
- Bell, F.H. 1981. Teaching and Learning Mathematics (In Secondary Schools). Wm.C. Brown Company, Dubuque, IOWA.
- Clements, Douglas H., Sarama, Julie. (2009). Learning and Teaching Early math: The Learning Trajectories Approach. New York: Routledge.
- Courant, R. & Robbins, H. (1996). What is mathematics?. New York: Oxford University Press.
- De Lange, J. (1987). Mathematics, Insight and Meaning. Utrecht: OW & OC, Rijksuniversiteit Utrecht.
- Gravemeijer, K.P.E. (1994). Developing Realistic Mathematics Education. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Gravemeijer, K. & Terwel, J. (2010). Hans Freudenthal: A mathematician on didactics and curriculum theory. Journal curriculum studies, 32, 777-796.
- Haylock, D., & Thangata, F. (2007). Key concept in teaching primary mathematics. SG: Sage Publication.

- EETC 510 contributors. (2017). Jean Piaget's Developmental Theory.http://etec.citl.ubc.ca/510wiki/index.php?title=Jean_Piaget%27s_Developmental_Stage_Theory&oldid=63453
- ICMER. (2010). *Mathematical thinking: how to develop it in the classroom*. International Conference on Mathematics Education Research 2010. <http://euro-math-soc.eu/review/mathematical-thinking-how-develop-it-classroom>
- Isoda, Masami & Katagiri, Shigeo. (2012). *Mathematical Thinking*. Singapore: World Scientific Publishing.
- Kennedy, M. L., Tippin, S. & Johnson, A. (2008). *Guiding children's learning of mathematics*. New York: Thomson Higher Education.
- Lefrancois, G. R. (2000). *Psychology for teaching*. London: Wadsworth
- Madiah Khalid. *Incorporating Mathematical Thinking in Addition and Subtraction of Fraction: Real Issues and Challenges*.https://www.academia.edu/652940/INCORPORATING_MATHEMATICAL_THINKING_IN_ADDITION_AND_SUBTRACTION.
- Marsigit, Ilham Rizkianto, Mila Mareta Murdiyani. (2015). *Filsafat Matematika dan Praktis Pendidikan Matematika*. Yogyakarta: UNY Press.
- Maryam Kargara, Rohani Ahmad Tarmizia, Sahar Bayat. *Relationship between Mathematical Thinking, Mathematics Anxiety and Mathematics Attitudes among University Students*. Laboratory of Innovations in Mathematics Education, Institute for Mathematical Research, Faculty of Educational Studies Universiti Putra Malaysia.
- Mike Ollerton. (2010). *Panduan Guru Mengajar Matematika*. (Judul Asli: *Mathematics Teacher's Handbook*) Erlangga. Jakarta.
- N.C.T.M. (1989). *Curriculum and Evaluation Standards*. Reston: NCTM.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

- Reys R. E., et al. (2009). *Helping children learn mathematics*. Boston: Allyn and Bacon.
- Russel, B. (2010). *Introduction to mathematical philosophy*. New York: The Macmillan Co.
- Santrock, J. W. (2008). *Life-span development*. (Terjemahan Juda Damanik, dkk) New York: McGraw-Hill (Buku Asli diterbitkan 1995)
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. A. Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 334-389). New York: McMillan.
- Skemp, Richard R. (1977). *The Psychology of Learning Mathematics*. Inggris: Penguin Books
- Stacey, K. (2006). Progress report, "Collaborative Studies on Innovations for Teaching and Learning Mathematics in Different Cultures (II) - Lesson Study focusing on Mathematical Thinking -". CRICED: University of Tsukuba.
- Streefland, L. (1991). *Realistic mathematics education in primary school*. Freudenthal Institute: Utrecht.
- Sutarto Hadi. (2005). *Pendekatan Matematika Realistik dan Implementasinya*. Cetakan pertama, Banjarmasin: Tulip

SUMBER GAMBAR

<http://www.rumusmatematikadasar.com/2014/10/rumus-luas-permukaan-tabung-dan-cara-menghitungnya.html>

http://p4mriusd.blogspot.co.id/2010/04/karakteritik-pmri-pendidikan-matematika_27.html

http://p4mriusd.blogspot.co.id/2010/04/karakteritik-pmri-pendidikan-matematika_27.html

http://p4mriusd.blogspot.co.id/2010/04/karakteritik-pmri-pendidikan-matematika_27.html

<https://navelmangelep.wordpress.com/2011/12/15/belajar-konsep-pembagian-melalui-permainan-membagi-permen-dengan-dadu/>

<http://projects.bounce.com/acer-guraru/guru-berbagi/belajar-matematika-dengan-pizza/>

<http://www.ayo-investasi.com/meja-sekolah.html>

<https://faridanursyahidah.wordpress.com/2011/09/19/proses-pembelajaran-kelipatan-persekutuan-terkecil-berbasis-cerita-rakyat-berbantu-permainan-kartu-bilangan-di-kelas-v-b-sd-yayasan-iba-palembang-by-farida-nursyahidah/>

- <https://blognyaprael.wordpress.com/2011/12/15/alat-peraga-matematika/>
- <http://www.sekolahdasar.net/2017/04/game-ice-breaking-tepuk-tangan-untuk-anak-sd.html>
- <http://www.prioritaspendidikan.org/id/post/137/mudahnya-menghitung-luas-persegi-dan-memahami-jenis-pekerjaan>
- [https://cbkewarganegaraan2019.wordpress.com/category/mi-al-ishlah/\(kubus\)](https://cbkewarganegaraan2019.wordpress.com/category/mi-al-ishlah/(kubus))
- <https://kelompokbdaridekave.wordpress.com/2016/03/26/mengajar-sdn-duri-kepa-pertemuan-ke-ii-dalam-program-tfi/>
- <https://pikiransigeta.wordpress.com/2014/06/02/52/>
- <http://grupdolaljabar.blogspot.co.id/2014/08/trapesium.html>
- <http://mafia.mafiaol.com/2013/01/pengertian-dan-sifat-sifat-jajargenjang.html>
- <http://www.hadyd.com/2016/12/ccontoh-benda-berbentuk-kubus.html>
- <http://soalulangansdn.blogspot.co.id/2015/11/soal-matematika-kelas-5-tentang-menentukan-volume-kubus-dan-balok.html>
- <https://brainly.co.id/tugas/2487054>
- <https://mymirormaze.wordpress.com/2014/03/15/rubik-cube/>
- <http://mafia.mafiaol.com/2014/05/pengertian-dan-unsur-unsur-tabung.html>
- <http://mafia.mafiaol.com/2014/03/cara-menentukan-luas-permukaan-kerucut.html>
- http://guraru.org/guru-berbagi/pemanfaatan_media_pembelajaran_untuk_membangun_pengetahuan_siswa_sd/
- <http://belajar.indonesiamengajar.org/2013/01/membuktikan-rumus-luas-trapesium-dan-layang-layang/>

<https://ummysalmah.wordpress.com/2012/12/15/the-area-of-parallelogram/>

<http://www.mikirbae.com/2017/02/luas-dan-keliling-belahketupat-dan.html>

<https://www.pondokmatematikasd.com/pembelajaran-penemuan-rumus-volume-tabung-kerucut-dan-limas.html>

<http://www.prioritaspendidikan.org/id/post/134/menemukan-volume-kerucut-dengan-inkuiri->

<https://navelmangelep.wordpress.com/2011/11/23/pembelajaran-volume-kubus-dan-balok-dengan-pendekatan-pmri-di-sd-xaverius-1-palembang/>

<http://www.educationalisme.com/luas-permukaan-dan-volume-prisma/>

[https://www.google.co.id/search?q=gambar+pensil&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjcrvPSsZnUAhVMu48KHWsgCwkQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#imgrc=FbLdruN67VbHMM:\(diaksespada 10 Mei 2017\)](https://www.google.co.id/search?q=gambar+pensil&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjcrvPSsZnUAhVMu48KHWsgCwkQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#imgrc=FbLdruN67VbHMM:(diaksespada 10 Mei 2017))

[https://www.google.co.id/search?q=gambar+piring&tbm=isch&imgil=fAB1kfaPuN1GwM%253A%253BrAIRTkXLdF4t0M%253Bhttps%25253A%25252F%25252Fpixabay.com%25252Fid%25252Fpiring-teller-hidangan-keramik-307177%25252F&source=iu&pf=m&fir=fAB1kfaPuN1GwM%253A%25252CrAIRTkXLdF4t0M%25252C_&usg=__N7wRGrENhI2aPcmCmZ50ZXXCdU%3D&biw=1366&bih=662&ved=0ahUKEwjv6K2JspnUAhUIo48KHWDWCQIQyjcIQA&ei=eFMuWe_MJojGvgSAracQ#imgrc=fAB1kfaPuN1GwM:\(diaksespada 10 Mei 2017\)](https://www.google.co.id/search?q=gambar+piring&tbm=isch&imgil=fAB1kfaPuN1GwM%253A%253BrAIRTkXLdF4t0M%253Bhttps%25253A%25252F%25252Fpixabay.com%25252Fid%25252Fpiring-teller-hidangan-keramik-307177%25252F&source=iu&pf=m&fir=fAB1kfaPuN1GwM%253A%25252CrAIRTkXLdF4t0M%25252C_&usg=__N7wRGrENhI2aPcmCmZ50ZXXCdU%3D&biw=1366&bih=662&ved=0ahUKEwjv6K2JspnUAhUIo48KHWDWCQIQyjcIQA&ei=eFMuWe_MJojGvgSAracQ#imgrc=fAB1kfaPuN1GwM:(diaksespada 10 Mei 2017))

[https://www.google.co.id/search?q=gambar+pecahan&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwia2LKIspnUAhWGrY8KHXPADhUQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#imgrc=E1HVl9xnm_CAUM:\(diaksespada 10 Mei 2017\)](https://www.google.co.id/search?q=gambar+pecahan&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwia2LKIspnUAhWGrY8KHXPADhUQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#imgrc=E1HVl9xnm_CAUM:(diaksespada 10 Mei 2017))

[https://www.google.co.id/search?q=gambar+volume+limas&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjPouu7spnUAhUEM48KHTP7BPsQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#imgrc=xHv5Ki0SshqjWM:\(diaksespada 10 Mei 2017\)](https://www.google.co.id/search?q=gambar+volume+limas&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjPouu7spnUAhUEM48KHTP7BPsQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#imgrc=xHv5Ki0SshqjWM:(diaksespada 10 Mei 2017))

[https://www.google.co.id/search?q=gambar+nilai+pecahan&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjWq-DcspnUAhULuY8KHV0mA7wQ_AUIBigB&biw=1366&bih=662#imgrc=HkYtAD2pr3CgnM:\(diaksespada 10 Mei 2017\)](https://www.google.co.id/search?q=gambar+nilai+pecahan&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwjWq-DcspnUAhULuY8KHV0mA7wQ_AUIBigB&biw=1366&bih=662#imgrc=HkYtAD2pr3CgnM:(diaksespada 10 Mei 2017))

[https://www.google.co.id/search?q=gambar+batu+bata&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwis_bb0spnUAhVBNo8KHWesBwcQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#tbm=isch&q=batu+bata\(diaksespada 10 Mei 2017\)](https://www.google.co.id/search?q=gambar+batu+bata&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwis_bb0spnUAhVBNo8KHWesBwcQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#tbm=isch&q=batu+bata(diaksespada 10 Mei 2017))

https://www.google.co.id/search?q=gambar+aquarium&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwi9gPnms5nUAhVGwI8KHd_RBgoQ_

AUICigB&biw=1366&bih=662#tbm=isch&q=gambar+balok+akuarium&imgrc=aVZ8fpcOFBSXMM:(diaksespada 10 Mei 2017)

https://www.google.co.id/search?q=aktivitas+siswa&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiM48mPtJnUAhUBuI8KHYBADq0Q_AUICigB&biw=1366&bih=662#tbm=isch&q=aktivitas+mengamati+siswa+SD&imgrc=NLidRkPTuxJQPM:

[https://www.google.co.id/search?q=media+volume+balok&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwj72Ym_tJnUAhUHN08KHbrXBmgQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#tbm=isch&q=+volume+balok&imgrc=65FAI2SmN8r5aM:\(diaksespada 10 Mei 2017\)](https://www.google.co.id/search?q=media+volume+balok&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwj72Ym_tJnUAhUHN08KHbrXBmgQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#tbm=isch&q=+volume+balok&imgrc=65FAI2SmN8r5aM:(diaksespada 10 Mei 2017))

[https://www.google.co.id/search?q=kubus+volume+balok&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiWxPuLtZnUAhUJKY8KHSwfAukQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#tbm=isch&q=media+volume+balok&imgrc=rXAY9EiszYkboM:\(diaksespada 10 Mei 2017\)](https://www.google.co.id/search?q=kubus+volume+balok&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwiWxPuLtZnUAhUJKY8KHSwfAukQ_AUICigB&biw=1366&bih=662#tbm=isch&q=media+volume+balok&imgrc=rXAY9EiszYkboM:(diaksespada 10 Mei 2017))

https://www.google.co.id/search?q=volume+balok&source=lnms&tbm=isch&sa=X&ved=0ahUKEwil0fK6tZnUAhWLPY8KHe5QDwcQ_AUICigB&biw=1366&bih=662. (diaksespada 10 Mei 2017).

TENTANG PENULIS



Prof. Dr. Marsigit, M.A lahir di Kebumen pada tanggal 19 Juli 1957. Mendapatkan gelar sarjana S1 pada jurusan Pendidikan Matematika, FKIE IKIP Yogyakarta pada tahun 1981. Gelar Master of Arts (M.A) diperolehnya dari Intitute of Education (INSTEAD), University of London pada tahun 1996. Memperoleh gelar Doktor Filsafat (Matematika) dari Universitas Gajah Mada pada tahun 2007. Kesibukannya sebagai dosen di Jurusan Pendidikan Matematika, FMIPA UNY tidak menghalanginya untuk tetap aktif mengisi Seminar, Lokakarya, Simposium baik berskala Kabupaten, Propinsi, Nasional, maupun skala Internasional. Beberapa kegiatan tersebut diantaranya Seminar Nasional Pengembangan Nilai-nilai dan Aplikasi dalam Dunia Matematika Sebagai Pilar Pembangunan Karakter Bangsa, di Universitas Negeri Semarang pada tahun 2011. Seminar Pendidikan Kareakter pada Bahan Ajar di Dikpora kota Surakarta tahun 2012, Diklat Pengembangan Materi Ajar Berbasis TIK Bagi Guru SMK RSBI Se-Propinsi DIY, di LPPM UNY pada tahun 2012, The DSME Seminar of Mathematics Education, Departement of Mathematics and Science Education, Faculty of Education, University of Melbourne tahun 2004, APEC - Ubon Ratchathani International Symposium 2011: Innovation on

Problem Solving Based Mathematics Textbooks and E-textbooks Ubon Ratchathani Thailand tahun 2011, APEC - Tsukuba International Conference VI: Innovation of Mathematics Education through Lesson Study Challenges to Emergency Preparedness for Mathematics February, di Tsukuba - Tokyo, Japan tahun 2012, dan lain-lain. Saat ini tinggal di Plosokuning II RT 10 RW 04 Minomartani, Ngaglik, Sleman, DIY. Untuk komunikasi bisa email marsigitina@yahoo.com; marsigit@uny.ac.id, atau bisa mengunjungi websitenya <http://powermathematics.blogspot.com>.



Budiharti, M.Pd. adalah staf pengajar di Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar FKIP Universitas PGRI Yogyakarta. Lahir di Sleman pada tanggal 11 Agustus 1985. mengajar pada mata kuliah tentang Matematika Sekolah Dasar. Pengalaman pendidikan menempuh S1 pada program studi Matematika dan S2 Pendidikan Dasar Konsentrasi Matematika di Universitas Negeri Yogyakarta, dan saat ini sedang menempuh studi lanjut S3 Ilmu Pendidikan konsentrasi Pendidikan Sekolah Dasar di UNY. Pernah menjadi narasumber untuk berbagai pelatihan untuk guru-guru SD. Publikasi ilmiah tentang pembelajaran matematika Sekolah Dasar dimuat pada jurnal *Prima Edukasia*, *Elementary School* dan dalam forum-forum ilmiah.



Anwar Novianto, M. Pd. lahir di Bantul Yogyakarta pada tanggal 28 Oktober 1989. Anak pertama dari tiga bersaudara. Pengalaman pendidikan di SDN 1 Blunyan lulus pada tahun 2002, SMP 2 Bantul pada tahun 2005, SMA 1 Bantul pada tahun 2008, sarjanapendidikan di UNY program studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar pada tahun 2012, magister pendidikan di UNY program studi Pendidikan Dasar pada tahun 2015, saat ini sedang menempuh studi lanjut S3 Pendidikan Dasar di UNY.

Penulis pernah bekerja menjadi guru SD pada tahun 2012-2013, dan saat ini penulis bekerja di Universitas Nahdlatul Ulama (UNU) Yogyakarta pada program studi PGSD.



Hendra Erik Rudyanto, M.Pd lahir pada tanggal 6 Desember 1988 di kelurahan Kawedanan RT 13 RW 03 Kecamatan Kawedanan, Kabupaten Magetan, Jawa Timur, Indonesia dari keluarga petani. Anak pertama dari tiga bersaudara dari Supiyanto dan Tri Sukeci. Penulis mengenyam pendidikan di SDN Kawedanan 2 lulus tahun 2001. Kemudian melanjutkan sekolah di SMPN 1 Kawedanan lulus tahun 2004. Melanjutkan sekolah ke SMAN 1 Madiun lulus tahun 2007. Setelah lulus SMA melanjutkan kuliah S1 PGSD IKIP PGRI Madiun lulus tahun 2011, kemudian melanjutkan studi S2 program studi Pendidikan Dasar konsentrasi pendidikan matematika UNNES lulus tahun 2014. Sekarang studi lanjut S3 Pendidikan Dasar di UNY. Saat ini penulis bekerja di Universitas PGRI Madiun di program studi PGSD. Sebagai insan akademik, penulis sebagaimana dosen lainnya, melakukan kegiatan mengajar, penelitian, pengabdian kepada masyarakat, dan kegiatan penunjang tri dharma perguruan tinggi.



Maria Emanuela Ewo, M.Pd (1973) adalah staf pengajar di Program Studi Pendidikan Guru Sekolah Dasar FKIP Universitas Flores pada mata kuliah Matematika Dasar dan Pendidikan Matematika. Pengalaman pendidikan yang diperoleh lulus SD tahun 1985, SMP tahun 1988, SMA tahun 1991, S1 tahun 1998, S2 tahun 2008, dan saat ini sedang mengikuti pendidikan S3 di program Studi Pendidikan Dasar Universitas Negeri Yogyakarta. Pernah mengikuti kegiatan dalam organisasi profesi antara lain sebagai anggota Ikatan Dosen PGSD se Indonesia di Surabaya tahun 2009, anggota assessor sertifikasi guru nasional tahun 2009-2013. Salah satu karya ilmiah yang dipublikasi adalah Penggunaan model Kooperatif tipe

STAD untuk meningkatkan kemampuan pemahaman konsep matematika materi pecahan pada siswa SD.

-oo0oo-